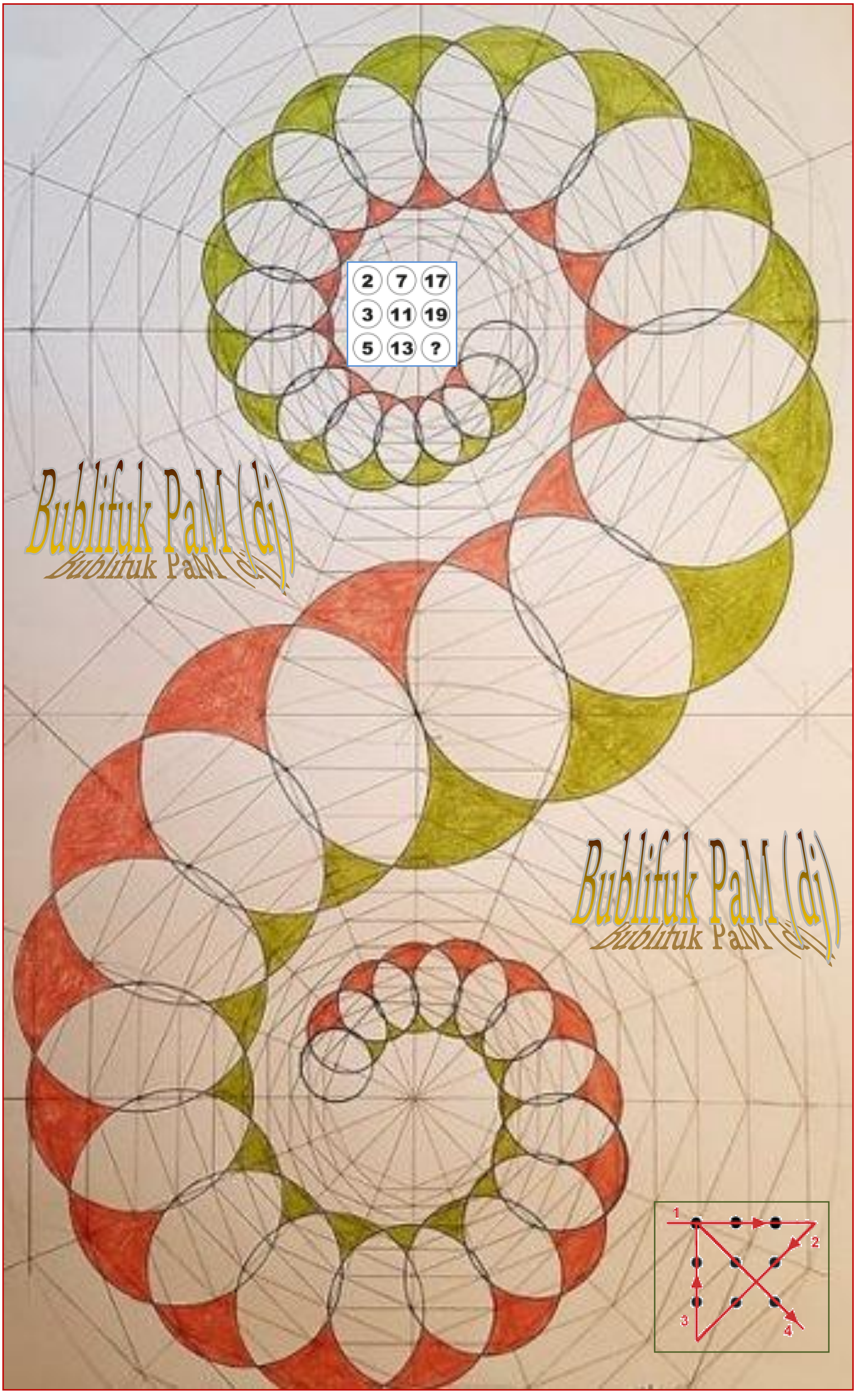
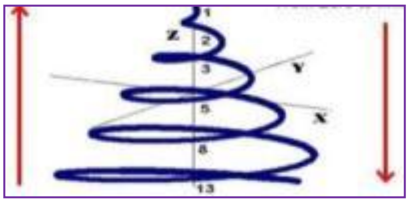
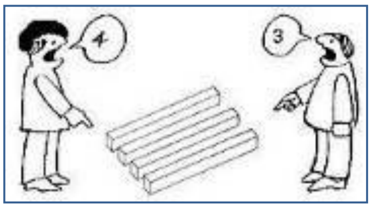


2 7 17
3 11 19
5 13 ?
Bublifuk PaM (dj)
Bublifuk PaM (dj)
1
2
3
4

Bublifuk je detská hra na výrobu mydlových bublín. *PaM* je skratka pre *počty a merbu* (školskú matematiku). ***Bublifuk PaM* (dj)** je súbor podnetov školskej matematiky od emeritného učiteľa počtov a merby D. J. Ich cieľom je motivácia a popularizácia matematickej kultúry v jednoduchých situáciách aj v historických súvislostiach. Predložený materiál je voľným nadviazaním na publikácie, ktoré autor šíril nielen na internete (http://www.era.topindex.sk/), ale aj súkromným vnucovaním do rúk žiakom, kolegom, známym, aj vlastnej rodine.
Po koronavírusom ošiali (roku 2020) ponúkam tieto *bubliny* aj vám.



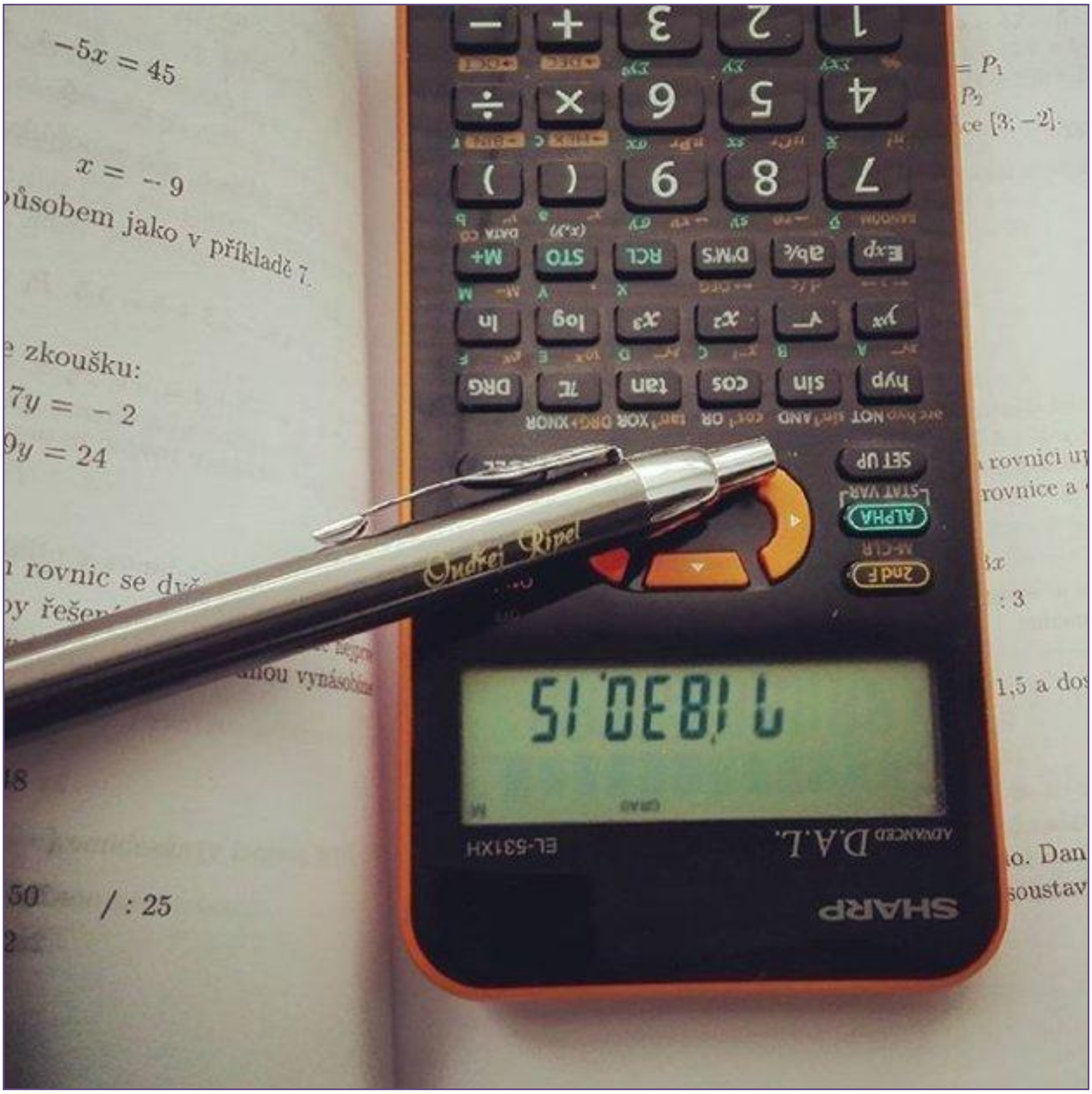


RADY PRE ŽIVOT

- *Uvedom si, že šťastie sa nezakladá na majetku, moci a sláve, ale na vzťahoch k ľuďom, ktorých máš rád a vážiš si ich.*
- *Neboj sa problémov. Ukrývajú sa za nimi veľké príležitosti.*
- *Nespaľuj mosty. Budeš prekvapený, koľkokrát musíš prekročiť tú istú rieku.*
- *Každý človek, s ktorým sa stretneš, vie niečo, čo ty nevieš. Nauč sa to od neho.*
- *Buď pripravený. Nikdy nebudeš mať druhú príležitosť urobiť dobrý prvý dojem.*
- *Nikdy sa nevzdávaj nádeje na záchranu niekoho. Zázraky sa dejú každý deň.*
- *Nikdy nepremárni príležitosť povedať niekomu, že ho máš rád.*
- *Pozoruj východ slnka aspoň raz za rok.*
- *Rob viac ako od teba očakávajú.*
- *Buď tam, kde ťa ľudia potrebujú.*
- *Kupuj hodnotné knihy, aj keď by si ich nikdy nečítal.*
- *Nauč sa vyrábať niečo pekné vlastnými rukami.*
- *Vždy maj na dohľad niečo krásne, aj keby to bola iba sedmokráska v miske na puding.*
- *Vyber si zamestnanie v súlade s tvojimi zásadami.*
- *Nikdy nekritizuj osoby, ktoré ti určujú výšku mzdy.*
- *Ak si v zamestnaní nešťastný, odíď.*
- *Prečítaj si znovu obľúbenú knihu.*
- *Ak sa dostaneš do závažných zdravotných problémov, zisti si diagnózu aspoň u troch lekárov.*
- *Nenechaj sa zastrašiť lekármi a sestrami. Aj keď si v nemocnici, stále je to tvoje telo.*
- *Staň sa pre niekoho hrdinom.*
- *Vždy prijmi podávanú ruku.*
- *Nečakaj, že ti peniaze prinesú šťastie.*
- *Mysli na veľké veci, ale teš sa z drobností.*
- *Snaž sa byť výborný, nie dokonalý.*
- *Neber nikdy nikomu nádej, môže to byť posledné čo má.*
- *Never ľuďom, ktorí od teba vyžadujú čestné slovo.*
- *Pros v modlitbách nie o veci, ale o múdrosť a odvahu.*
- *Nikdy nepodceňuj silu láskavého slova a skutku.*
- *Zlepši svoj výkon iným spôsobom myslenia.*
- *Neplytvaj bezstarostne časom alebo slovami. Ani jedno sa nedá zobrať späť.*
- *Buď vďačný za to, čo máš.*
- *Buď statočný. A aj keď nie si, aspoň to predstieraj. Rozdiel nikto nespozná.*

RADY PRE ŽIVOT – H. Jackson **BROWN**, Jr.

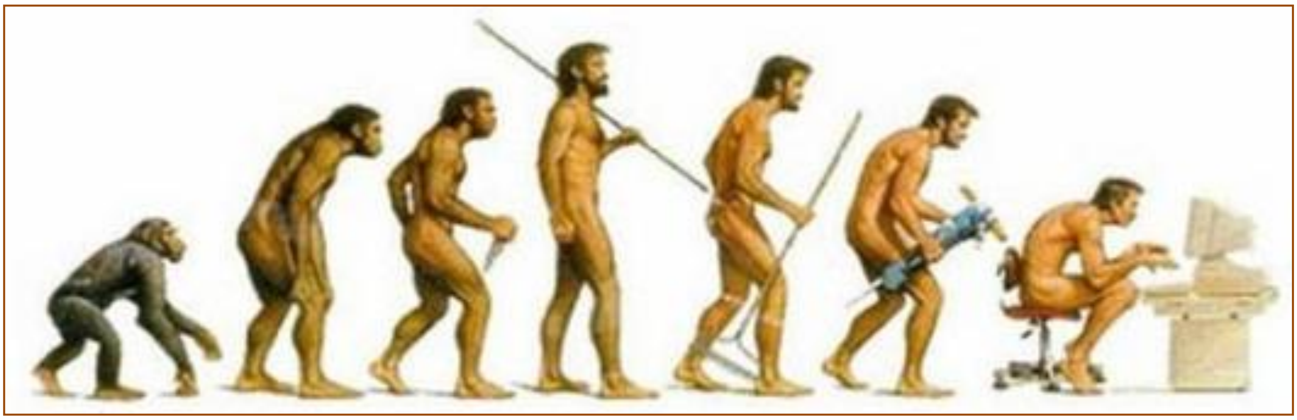
(vybral a spracoval D. J.)



Jediný vtipný moment bol,
keď si do kalkulačky naťukal 71830 15
a na displeji sa zobrazilo:
SI DEBIL

Je ťažké byť synom matematika.
Pri obede otec hovorí synovi: *Ak nezješ zeleninu, nedostaneš zmrzlinu!*
Syn s veľkou námahou zeleninu zjedol, **avšak zmrzlinu nedostal...**

Rimanom nepripadala matematika veľmi zaujímavá,
pretože X bolo vždy 10.



Najuniverzálnejší antický mysliteľ Aristoteles zo Stageiry (384 – 322 pred n. l.) poznal, že ***na človeku je najpozoruhodnejšia jeho schopnosť myslieť***. Kresťanský neoplatonik Boethius (okolo 480 – 524) odkázal, že ***všetka náuka o pravde je zahrnutá v mnohosti a veľkosti***. Uznal, že ***nemôže dosiahnuť poznanie božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike*****.** Františkánsky mních R. Bacon (asi 1214 – 1294) vytušil, *že* ***čím viac základ prírody rozširujeme, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať... Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky.*** **Odvtedy platia jeho slová:** ***Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.*** René Descartes (1596 – 1650), ktorý považoval ľudský rozum za rozhodujúci zdroj poznania, sa vyjadril: ***Porovnával som tajomstvá prírody so zákonmi matematiky. Bol som a som presvedčený, že ten istý kľúč otvára dvere k pochopeniu jedného aj druhého***. V 17. storočí francúzsky matematik, fyzik i filozof Blaise Pascal (1623 – 1662) k tomu dodal: ***Celá ľudská dôstojnosť spočíva v myslení. Snažme sa preto, aby sme mysleli správne; v tom je princíp mravnosti.*** Zodpovedný humanista Bernard Bolzano (1781 – 1848) vyznal: ***Matematiku možno popísať ako vedu, ktorá pojednáva o všeobecných zákonitostiach (formách), podľa ktorých sa veci musia riadiť vo svojom bytí.*** Anglický matematik James J. Sylvester (1814 – 1897) vedel, že ***matematika je najistejšia pôda pre ľudstvo. Zostane nedotknuteľná až kým sa plán univerza, ktorý sa rozprestiera pod našimi nohami ako mapa, nestane súčasťou ľudskej mysle... Matematika zvyšuje ľudské schopnosti postupnými krokmi od začiatku k stále vyšším stupňom intelektuálnej existencie.*** Americký filozof a logik Charles S. Peirce (1839 – 1914) ponúkal: ***Matematika je štúdium ideálnych konštrukcií a odhaľovanie predtým neznámych vzťahov medzi časťami týchto konštrukcií... Matematika skúma čo je a čo nie je logicky možné, bez toho, aby zodpovedala za jeho aktuálnu existenciu.*** Nemecký filozof a historik vedy Ernst Cassirer (1874 – 1945) zhrnul: ***Matematika je univerzálny symbolický jazyk, ktorý sa nezaoberá opisom vecí, ale všeobecným vyjadrovaním vzťahov... Matematika je sprostredkujúca sféra medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom.*** Poľský dominikán, logik a filozof Józef M. Bocheński (1902 – 1995) vyučoval: ***Človek je aj tým, kto poznáva ideálne skutočnosti.. Myslieť znamená tvoriť pojmy... Za významné výsledky našej vedy vďačíme ďaleko viac mysleniu než pozorovaniu.*** Moderný francúzsky spisovateľ a filozof Jean Guitton (1901 – 1999) odvážne konštatoval: ***Realita nie je iba výtvorom z hmoty, ale aj produktom ducha.***

Ľudská myseľ vynašla matematiku na to, aby porozumela stvoreniu; ak je však príroda skutočne štruktúrovaná podľa matematického jazyka a matematika vynájdená ľuďmi ju dokáže porozumieť, ukazuje to niečo mimoriadne. Objektívna štruktúra vesmíru a intelektuálna štruktúra ľudskej bytosti sú v zhode; subjektívny rozum a objektivizovaný rozum v prírode sú totožné. Je to nakoniec „jeden“ rozum, ktorý oba spája a podnecuje nás, aby sme spoľahli na jedinečnú tvorivú Inteligenciu. Benedikt XVI. (2009)

ZAUJÍMAVÝ ROK 2020 (CORONA)

Doplňte ďalší člen postupnosti a zdôvodnite to:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, $\square$

Doplĺňam **2020** ... ?! ... zdá sa vám to podivné?

Myslel som postupnosť $\{a_n\}$ zadanú

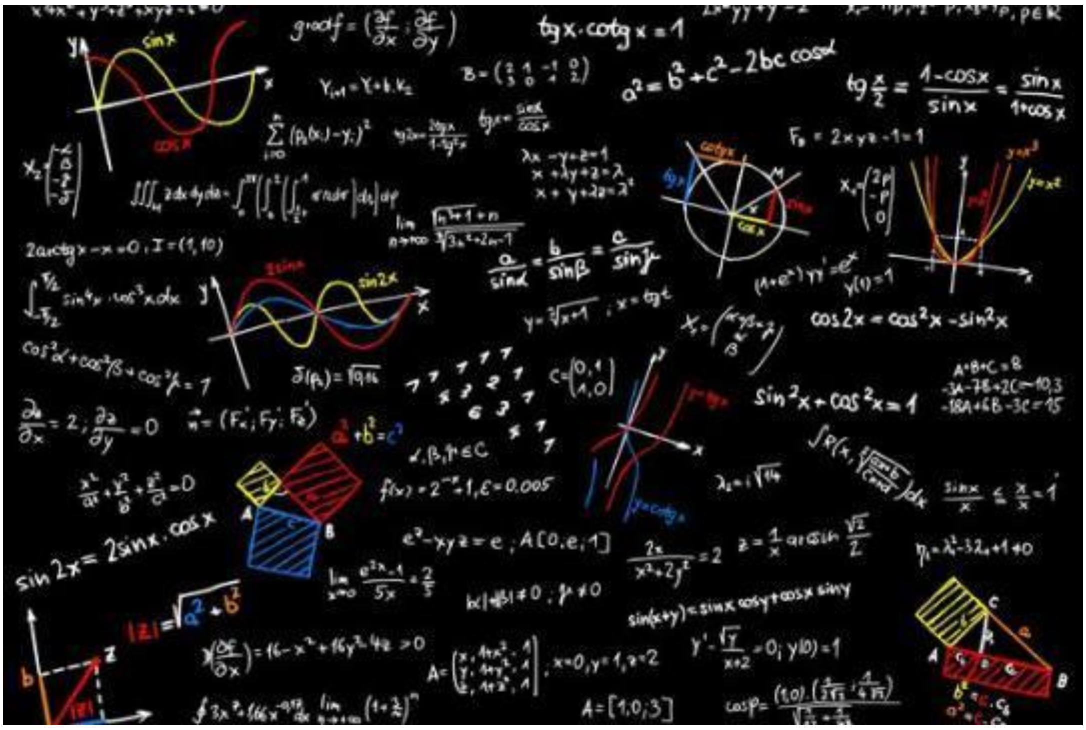
$$a_n = n + 2012 \cdot \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\cdot(n-6)\cdot(n-7)}{7!}$$

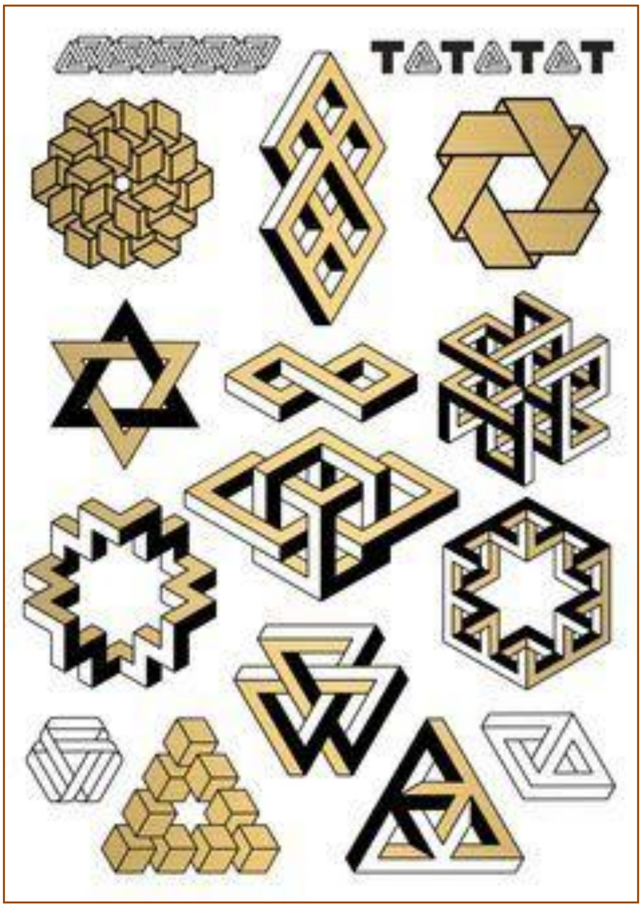
pre $n \in N.$

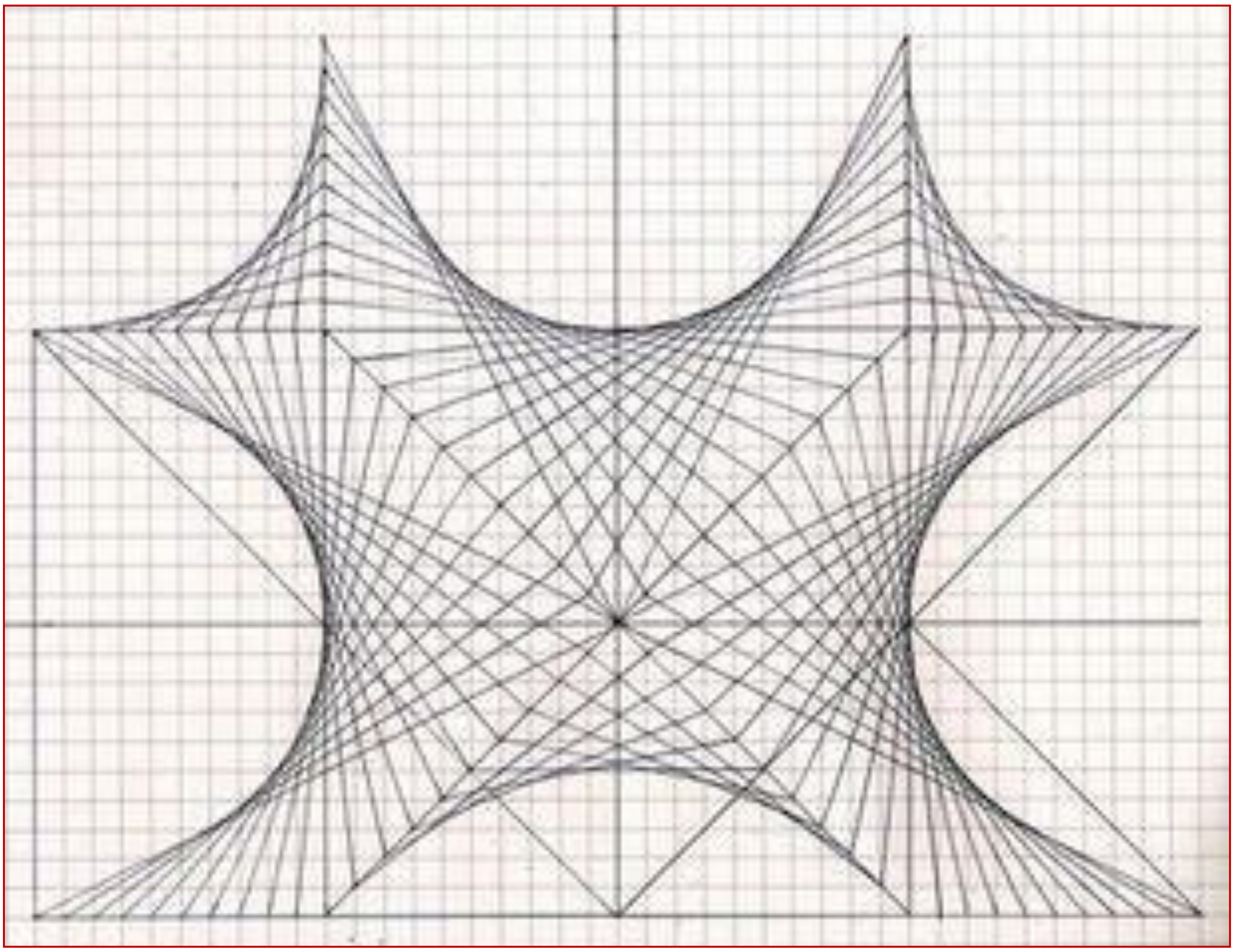
Prvých sedem členov tejto postupnosti si určite vyčíslite sami. Ôsmy člen mnou myslenej postupnosti
je $a_8 = 2020$. Vyhovuje to.
V roku pandémie koronavíru 2020
je to predsa celkom dobre pochopiteľné...

Čo ste mysleli vy?

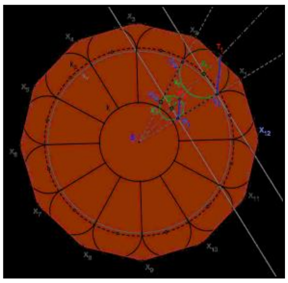
Viete predsa, že postupnosť nie je jednoznačne určená svojimi prvými členmi.




TATATAT



O matematike (s filozofickým nádychom)



Najušľachtilejšia sila našej duše je schopnosť, ktorá sa spolieha na meranie a výpočet... Počty a merba vedú k rozumovému poznávaniu, k pravde a lepšiemu pochopeniu všetkých náuk... Matematika ponúka skvelý prostriedok pre objavenie právd, ktoré sú bez účasti rozumu nedostupné.
(Platón, starogrécky mysliteľ a filozof; 427 – 347 pred n. l.)

Najpozoruhodnejšie na človeku je jeho schopnosť myslieť...
Matematika pozoruje veci, nevnímajúc zmyslové, zaujímajúc sa o vlastnosti množstva a súvislostí.
(Aristoteles, starogrécky filozof a logik; 384 – 322 pred n. l.)

Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet... Chcel by som vysloviť predpoveď, že čím viac základ prírody rozširujeme, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať... Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky. (R. Bacon, františkánsky mních; asi 1214 – 1294)

Matematiku možno popísať ako vedu, ktorá pojednáva o všeobecných zákonitostiach (formách), podľa ktorých sa veci musia riadiť vo svojom bytí. (B. Bolzano, profesor pražskej univerzity; 1781 – 1848)

Matematika je najistejšia pôda pre ľudstvo. Zostane nedotknuteľná až kým sa plán univerza, ktorý sa rozprestiera pod našimi nohami ako mapa, nestane súčasťou ľudskej mysle... Matematika zvyšuje ľudské schopnosti postupnými krokmi od začiatku k stále vyšším stupňom intelektuálnej existencie. (J. J. Sylvester, anglický matematik; 1814 – 1897)

Matematika je štúdium ideálnych konštrukcií a odhaľovanie predtým neznámych vzťahov medzi časťami týchto konštrukcií... Matematika skúma čo je a čo nie je logicky možné, bez toho, aby zodpovedala za jeho aktuálnu existenciu. (Ch. S. Peirce, americký učenec, filozof a logik; 1839 – 1914)

Originalita matematiky spočíva v tom, že v matematickej vede sú vyjadrené vzťahy medzi vecami, ktoré sa bez sprostredkovania ľudským rozumom nedajú vôbec postihnúť.
(A. N. Whitehead, anglický filozof a logik; 1861 – 1947)

Matematika je univerzálny symbolický jazyk, ktorý sa nezaoberá opisom vecí, ale všeobecným vyjadrovaním vzťahov... Matematika je sprostredkujúca sféra medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom. (E. Cassirer, nemecký filozof a historik vedy; 1874 – 1945)

V samej matematike sa realita prejavuje vo svojej podstatnej funkcii: podnecovať myslenie.
(G. Bachelard, francúzsky filozof; 1884 – 1962)

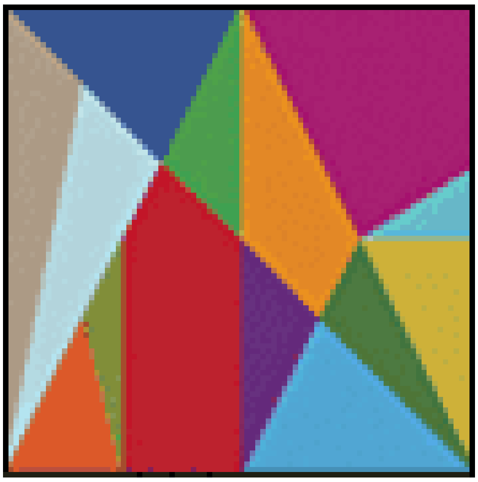
Matematika je monumentálna stavba, postavená ľudskou predstavivosťou pre pochopenie vesmíru. V nej sa stretneme s okolitým a nekonečným, uchvacujúcim a nevystihnutelným.
(Le Corbusier, francúzsko-švajčiarsky architekt, urbanista, sochár; 1887 – 1965)

Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť poznávať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu. (G. Polya, maďarsko-americký matematik; 1887 – 1985)

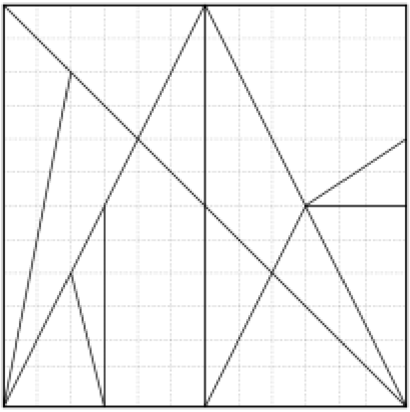
Matematika ťa neučí jednoduché odpovede na nejakú otázku, ale celú jazykovú hru s otázkami aj odpoveďami. (L. Wittgenstein, rakúsky analytický filozof a logik; 1889 – 1951)

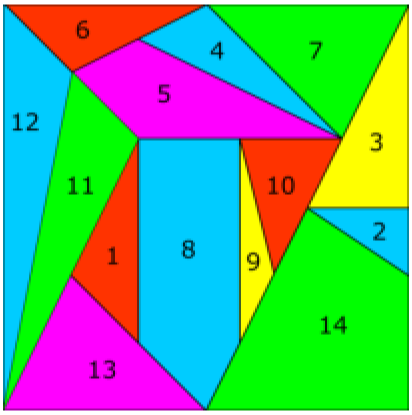
Matematika je skúmanie najvšeobecnejších možných štruktúr, nech sú už dané priestorovo, časovo alebo dokonca len čisto pojmovo.
(C.F. Weizsäcker, nemecký fyzik, filozof a teoretik vedy; 1912 – 2007)

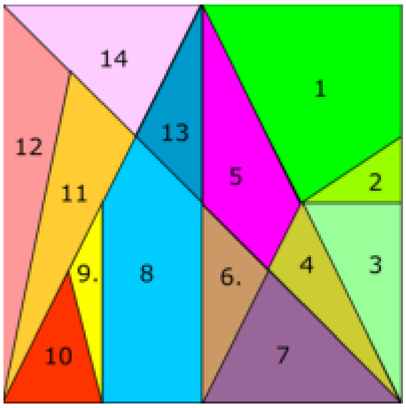
Matematika je najmocnejší intelektuálny nástroj, ktorý bol kedy vytvorený a prostredníctvom ktorého unikáme času. (L. Kolakowski, poľský filozof a historik; 1927 – 2009)

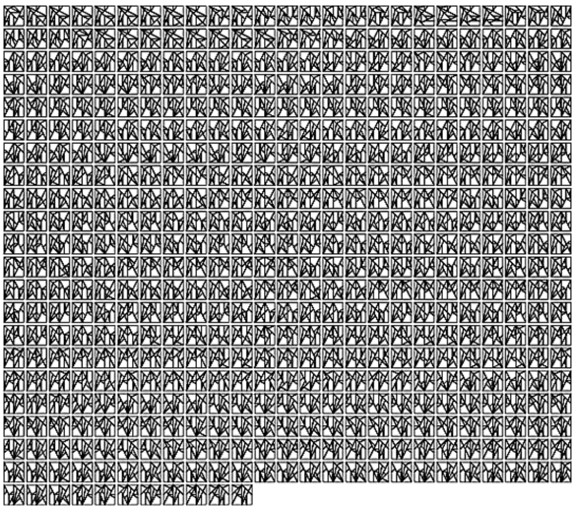


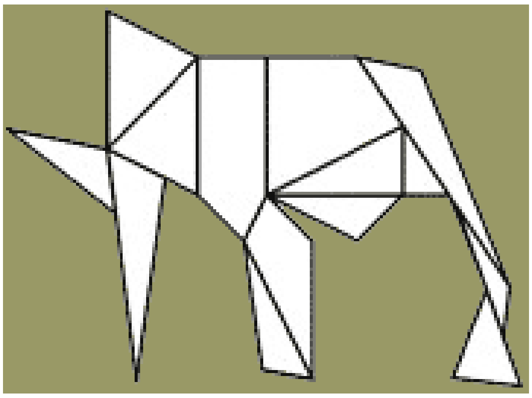
OSTOMACHION je pojednanie Archimedovej matematiky (Archimedov palimsest).
Je to skladačka podobná tangramu, v ktorej sa má rôznymi postupmi zložiť štvorec.







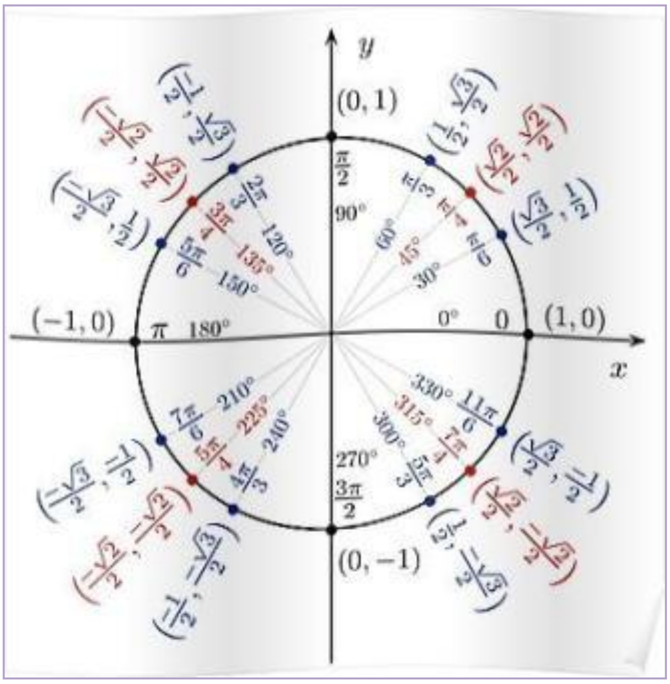




https://www.youtube.com/watch?v=8DzCad3BDlQ

https://www.youtube.com/watch?v=MwGHk77c8hM

α, °	rad	SIN	COS	TG	CTG
0°	0	0	1	0	$\pm\infty$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{(1-\frac{2}{\sqrt{5}})}$	√(5+2√5
22,5°	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}$	$\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$	$\sqrt{(1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
54°	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{(1+\frac{2}{\sqrt{5}})}$	√(5 - 2√
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
67,5°	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$	$\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
72°	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$	$\sqrt{(1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	$\pm\infty$
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0	$\pm\infty$



Α	α	alpha	αλφα
Β	β	beta	βητα
Γ	γ	gamma	γαμμα
Δ	δ	delta	δελτα
Ε	ε	epsilon	εψιλον
Ζ	ζ	zeta	ζητα
Η	η	eta	ητα
Θ	θ	theta	θητα
Ι	ι	iota	ιωτα
Κ	κ	kappa	καππα
Λ	λ	lambda	λαμβα
Μ	μ	mu	μυ
Ν	ν	nu	νυ
Ξ	ξ	xi	ξι
Ο	ο	omicron	ομικρον
Π	π	pi	πι
Ρ	ρ	rho	ρω
Σ	σ	sigma	σιγμα
Τ	τ	tau	ταυ
Υ	υ	upsilon	υφιλον
Φ	φ	phi	φι
Χ	χ	chi	χι
Ψ	ψ	psi	ψι
Ω	ω	omega	ωμεγα

Jediným šťastím ľudského ducha je nachádzanie pravdy,
postupné a tvrdošijné odstraňovanie tajomstiev.

J.Bruller – Vercors (1902 – 1991)

Akokoľvek ďaleko veda rozšíri svoje poznatky,
jej pole bude vždy ohraničené;
okolo jej hraníc vznáša sa tajomstvo
a čím ďalej sa budú posúvať tieto hranice,
tým viac sa rozšíri i tajomstvo.

H. Poincaré (1854 – 1912)

Čo je krásnejšie nad nebo, ktoré obsahuje všetko krásne?

Mikuláš Koperník (1473 –1543)

Budeme hľadať tak, akoby sme mohli nájsť,
ale nikdy nenájdeme tak, aby sme mohli prestať hľadať.

Aurelius Augustinus (354 – 430)

Vo svete matematiky

- *Svet nemôže byť úplne chaotický, inak by sme v ňom neboli schopní prežiť.*

- *Na rozpoznávanie, klasifikáciu a využívanie vzorov vyvinula ľudská myseľ a kultúra formálny systém uvažovania, ktorý nazývame **matematika**.*

- ***Matematika** má úžasnú moc odkryť nečakanú štruktúru aj tam, kde vládne zdanlivo len chaos.*

- *Práve vďaka svojej svojráznosti poskytuje mentálny svet matematiky ľuďom veľkú časť z najhlbšieho porozumenia okolitému svetu.*

- ***Matematika** je viac–menej systematický spôsob objavovania pravidiel a štruktúr, ktoré sa skrývajú za nejakým pozorovaným vzorom alebo pravidelnosťou, a následného vysvetlenia toho, čo sa deje, použitím týchto pravidiel a štruktúr.*

- ***Matematika** je veda o vzoroch a príroda využíva takmer každý vzor, ktorý je k dispozícii... Funkciou matematiky je usporadúvať základné vzory a pravidelnosti tým najuspokojivejším spôsobom.*

- *Číslo je proces, ktorý bol zvecnený pred dlhou dobou tak dôkladne, že o ňom každý uvažuje ako o veci... Číslo je iba jednou z nepreberného množstva matematických kvalít, ktoré nám pomáhajú pochopiť a popísať prírodu.*

- *Reálne čísla sú jednou z najodvážnejších idealizácií, ktoré kedy uskutočnila ľudská myseľ.*

- *Život samotný je proces vytvárania symetrie... **Matematika** môže osvetliť veľa stránok prírody, o ktorých ako o matematických normálne neuvažujeme.*

- ***Dobrá matematika**, nech už pramení z čohokoľvek, sa nakoniec ukáže ako užitočná.*

- *Náš svet spočíva na matematických základoch a matematika sa stala neodmysliteľnou **súčasťou našej všeobecnej kultúry**.*

- *Matematika predstavuje vrcholné štádium prenosu technológií – skôr než o mechanické ide o mentálne technológie, spôsoby myslenia...*

- ***Matematika** je nesporne užitočný spôsob premýšľania o prírode.*

Ian Stewart (*1945) *Čísla prírody*. Bratislava: Archa 1996

*Matematika pojednáva o myšlienkach, o tom, ako určité fakty nevyhnutne vyplývajú z iných, ako určité štruktúry majú automaticky za následok určité javy. Matematika nám umožňuje budovať **myšlienkové modely sveta** a zachádzať s nimi spôsobom, ktorý by sme v naozajstnom pokuse nemohli uskutočniť.* (Ian Stewart)

Nevstupuj, kto nepoznáš matematiku.

Platón

(427 - 348 pred n. l.)

Boh je matematik.

P. Dirac

(1892 - 1984)

Ten neznámy ukrytý za kozmom
je prinajmenšom hypermatematickou inteligenciou,
ktorá kalkuluje a produkuje vzťahy,
takže musí byť typom
abstraktným a duchovným.

J. Guitton

(1901 - 1999)

Bernard BOLZANO – priateľ matematickej kultúry

Ak čítame texty B. Bolzana, vždy znovu žasneme nad jasnosťou a presnosťou jeho vyjadrení, dôkladnosťou spracovania a neošúchanosťou myšlienok. Všetko, čím sa zaoberal, sám do hĺbky premyslel, svoje úvahy potom postavil na pevne vybudovaný logický základ a prepojil ich jasnými súvislosťami (K. Trlifajová). Bernard Bolzano (5.10.1781 – 18.12.1848), profesor pražskej univerzity, mimoriadny zjav kultúrnej minulosti v Čechách, odžil svoj neľahký osud medzi etikou a matematikou, náboženstvom a logikou. Vo svojej dobe bol starostlivým a citlivým vychovávateľom, prísnym a spravodlivým examinátorom, pozoruhodným a úspešným učiteľom s neobyčajnou popularitou i morálnou autoritou. Za vrchol ľudských povinností považoval všeobecné blaho. Človek je, podľa Bolzana, povolaný k múdrosti, cnosti a blaženosti.

Z myšlienok

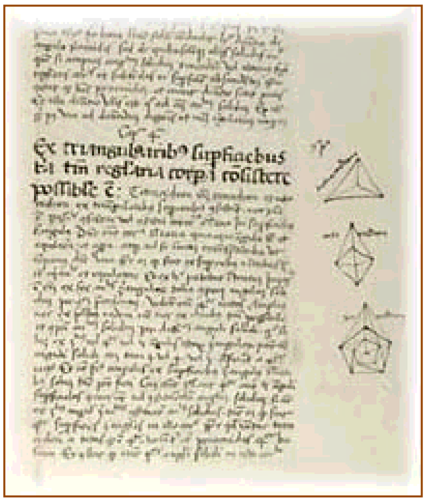
- *Zo všetkých možných spôsobov jednania vyber vždy ten, ktorý po uvážení všetkých dôsledkov najviac prispeje k blahu celku.*
- *Omnoho viac ako o šírenie užitočných právd sa musíme usilovať o to, aby sa cvičením u ľudí rozvinula schopnosť úsudku...* ***musíme ich naučiť samostatne rozpoznávať nesprávne úsudky.***
- *Musíme byť rozhodní. Priľnúť k pravde, k dobrej veci ľudstva, a nie sa chcieť zapáčiť nejakej strane, nejakej ľudskej stolici.*
- *Odvahu potrebuje aj učiteľ, pretože pravá osveta vždy naráža na odpor; v každej krajine sa nájdu ľudia, pre ktorých je čistá pravda soľou v očiach.*
- *Priznajme sa pred celým svetom, že potrebujeme lásku, milovať a byť milovaní. Nehanbime sa za to, že sme ľudia!*
- *Nič nemôže zabrániť tomu, aby sme neodvodili z najpravdivejších tvrdení, ak ich spojíme s nepravdivými predpokladmi – najzvrátenejšie a najhanebnejšie závery.*
- *Príde doba, keď budú ľudia pociťovať k vojne, k tejto nezmyselnej túžbe dokázať svoju pravdu mečom, rovnako všeobecný odpor, aký teraz pociťujú k súboju.*
- *Pravá veselosť nielenže neuberá z dôstojnosti ľudskej, ale je aj podstatnou podmienkou jej dokonalosti.*
- *Byť šťastný a iných obšťastňovať – to je pravé poslanie človeka...* ***Podstatné je ctiť v každom človeku dôstojnosť ľudskej prirodzenosti.***
- *Múdry človek nie je nikdy pyšný a spupný; skôr o sebe zmýšľa skromnejšie ako iní... nechce panovať nad inými, ale nechce tiež byť ich sluhom...*
- ***Filozofiu môže s úžitkom sledovať len ten, kto má solídne matematické vzdelanie.***
- *Bez toho, že by sme preceňovali hodnotu, ktorú poznanie má, musíme všetci uznať, že nevedomosť a omyl pôsobí celému ľudstvu nesmierne zlo... každý človek, pokiaľ je živý, má pokračovať vo svojom vzdelávaní...* ***Viera nás nezbavuje povinnosti používať vlastný rozum a naopak.***
- ***Matematiku*** *možno definovať ako vedu, ktorá pojednáva o všeobecných zákonoch, podľa ktorých sa veci musia riadiť vo svojej existencii... Cenil som si na matematike len to, čo je súčasne filozofiou.*
- *Niečo je pravda nie preto, že to tak poznáva Boh, ale naopak Boh to tak poznáva, pretože to tak je... Keby neboli pravdy samé o sebe, nemohli by existovať ani žiadne poznané alebo myslené pravdy.*
- *Predovšetkým som si stanovil pravidlo, že ma žiadna zrejmosť predpokladu nedonúti k tomu, aby som sa cítil zbavený povinnosti hľadať preň dôkazy tak dlho, pokiaľ jasne neuvidím, že nemožno a prečo nemožno požadovať žiadny dôkaz.*
- ***Konečné a nekonečné*** *sa vzťahuje na určité vnútorné vlastnosti predmetov a vôbec sa netýka len ich vzťahov k našej poznávacej schopnosti či dokonca k našim zmyslom.*
- *Nič na svete nesmieme mať za istejšiu a nepochybnejšiu ako zásadu, že všetci pozemšťania sa vyznačujú v podstate rovnakou prirodzenosťou a majú v podstate rovnaké práva... Každý boháč namiesto toho, aby si robil nárok na zvláštne prejavy úcty, by mal cítiť kvôli svojmu bohatstvu potrebu ospravedlnenia a obhajoby.*
- ***Slabý matematik nebude nikdy mocným filozofom****... aby to, čo možno bolo povedané nejasne, bolo vysvetlené jasnejšie, to, čo je úplne nesprávne, bolo odvolané, ale všetko správne a pravdivé, aby čo najskôr bolo všeobecne prijaté.*

Thomas Bradwardinus – počtár vhodných pomerov

Doba a život

Jedným z významných predstaviteľov oxfordskej školy prírodnej filozofie je aj Thomas Bradwardinus (asi 1290 – 1349). Pochádzal z mestečka Chichester. Vyštudoval teológiu Merton College na Oxfordskej univerzite, ako františkánsky mních sa stal aj kanonikom (1333) i kancelárom Katedry sv. Pavla v Londýne (1335). Bol aj osobným kaplánom kráľa Edwarda III. Od 4. júna 1349 bol Bradwardinus ustanovený za arcibiskupa cantenburského. Ako obeť moru zomrel 26. 8. 1349 v Londýne.

Vzťah k prírodným vedám



Bradwardinus bol presvedčený o tom, že všetky príčiny prírodných javov sa dajú vyjadriť matematicky (pomocou čiar, uhlov, číselných pomerov). Vydal odbornú prácu *O pomeroch rýchlosti pri pohybe* (1328). Skúmal závislosť medzi rýchlosťou a silou, ktorá ju spôsobuje. Uvádzal, že rýchlosť je priamo úmerná pôsobiacej sile a nepriamo úmerná odporu, teda hmotnosti a treniu. Z matematiky napísal práce: *Praktická aritmetika, O teoretickej aritmetike, Teoretická geometria, Traktát o spojitosti*. V nich skúmal napríklad aj pravidelné mnohouholníky, izometrické vlastnosti kruhu a gule, pomery iracionálnych čísiel, vypĺňanie priestoru pomocou pravidelných mnohostenov. Zvlášť zaujímavé úvahy viedol Bradwardinus o spojitosti (1328 až 1335). Odmietal názor o tom, aby kontinuum pozostávalo z konečného počtu nedeliteľných častí, ale aj tvrdenie, že spojité možno dostať ako nekonečne veľa nedeliteľného. *Žiadne kontinuum sa nedá zložiť z nekonečne veľa nedeliteľných.* V podstate už vo svojej dobe rozlišoval aktuálne a potencionálne nekonečno. V *Traktáte o pomeroch* (1328) jasne odlíšil počítanie s kvantitami veličín od výpočtov s prostými číslami. Pochopil pojem funkcia, jej argument a hodnotu funkcie.

Filozof a teológ

Vystúpil (1344) proti pelagiánskym názorom, podporil názor na priamu všemohúcnosť Boha prísnou determináciou. V práci *De causa Dei* písal o možnostiach všetko poznávajúcej vedy. Bol nasledníkom učeného Dunsa Scota (1270 – 1308), ktorý uprednostňoval vôľu pred poznávaním (pretože aktívna vôľa usmerňuje intelekt), ale za vedu považoval v prvom rade prírodnú vedu (náboženské dogmy sú exaktne nedokázateľné, ale majú praktický význam pre ľudské konanie). Bradwardinus začal sústreďovať svoju pozornosť na rôznorodé formy, metódy a netradičné možnosti ľudského uvažovania.

S novým pohľadom

Thomas Bradwardinus nesporne prispel k vytváraniu pojmu funkcia, lebo spoznal, že existuje časový priebeh nejakej fyzikálnej veličiny. Pýtal sa, ako prebieha zmena, hľadal medzi zmenami veličín príslušné pomery. Zvlášť citlivo pristúpil k chápaniu spojitého a diskrétneho, ktoré leží na rozhraní medzi fyzikou, matematikou a filozofiou. Pohyb chápal ako prechod priestorového kontinua časom. Bradwardinus chcel pomocou matematických úvah vysvetliť niektoré vlastnosti základných pojmov: priestoru, času a pohybu.

Čriepky

Sedem názorov z histórie matematiky

Matematika ponúka skvelý prostriedok pre objavenie právd, ktoré sú bez účasti rozumu nedostupné ... Počty a merba vedú k rozumovému poznávaniu, k pravde a lepšiemu pochopeniu všetkých náuk.
(**Platón,** asi 427 – 347 pred n. l.)

Číslo bolo v mysli Stvoriteľa bezpochyby prvotným vzorom stvorených vecí... Všetka náuka o pravde je zahrnutá v mnohosti a veľkosti... Nemôže dosiahnuť božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike.
(**Boethius**, asi 480 – 524)

Kto nedoceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto neovláda matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.
(**R. Bacon**, 1214 – 1292)

Matematika je najväčšou potechou rozumu. Jej je treba dať prednosť pred ostatnými ľudskými bádaniami a vedami.
(**Leonardo da Vinci**, 1452 – 1519)

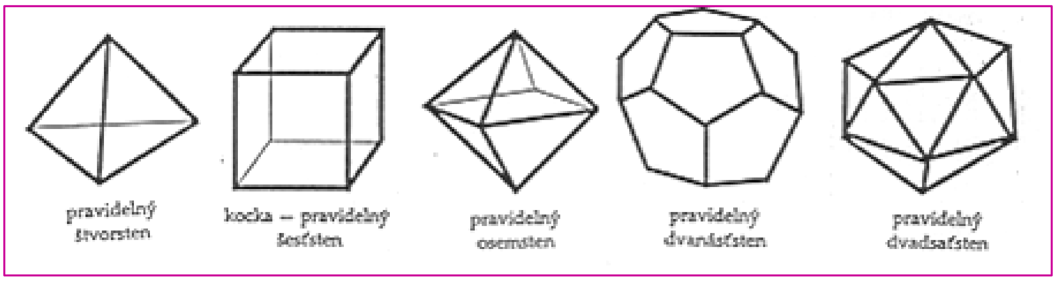
Celá naša dôstojnosť spočíva v myslení. V ňom sa musíme vzopnúť, nielen v priestore a čase, ktoré nedokážeme naplniť. Usilujme sa teda, aby sme mysleli správne. V tom je princíp mravnosti... Matematika je najnáročnejším zamestnaním pre rozum: je najkrajším remeslom na svete.
(**B. Pascal**, 1623 – 1662)

Matematika je veda o nekonečne. Jej cieľom je, aby človek, ktorý je konečný, vystihol nekonečno pomocou znakov... Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta.
(**H. Weyl**, 1885 – 1955)

Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobudneme cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu.
(**G. Polya**, 1887 – 1985)

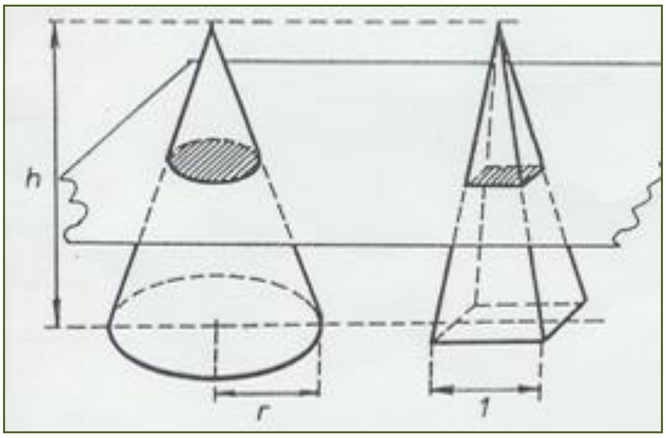
Platónske telesá

Pred 2500 rokmi mali etruské deti obľúbenú hračku – *pravidelný dvanásťsten* (vykopávky v Monte Loffa pri Padove). Hračka z Ptolemaiovej doby, vystavená v egyptologických zbierkach Britského múzea v Londýne, má tvar pravidelného dvanásťstena. Ktoré telesá spĺňajú definíciu pravidelného mnohostena? Tie, ktoré sú *konvexné, majú všetky steny zhodné pravidelné n – uholníky a pri každom vrchole je zoskupený rovnaký počet hrán (stien)*. Takýchto telies je len päť a majú prezývku *platónske*. V starom Grécku ich vlastnosti podrobne študoval aj filozof Platón (427 – 347 pred n. l.).



Zaujímavý postreh – *Cavalieriho princíp*

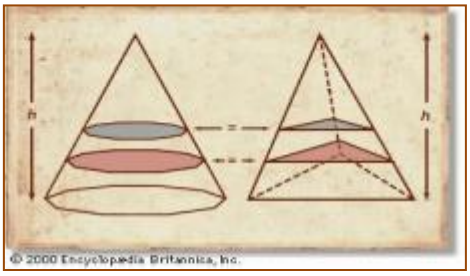
Predstavte si dva rovnako vysoké stĺpce na seba uložených rovnakých mincí. Jeden stĺpec je pravidelný, zrovnaný do kolmého rotačného valca. V druhom stĺpci sú jednotlivé mince rôzne nerovnomerne posunuté, teleso z nich vytvorené je nepravidelné. Je však zrejmé, že obe takto rôznym spôsobom vzniknuté telesá majú rovnaký objem.

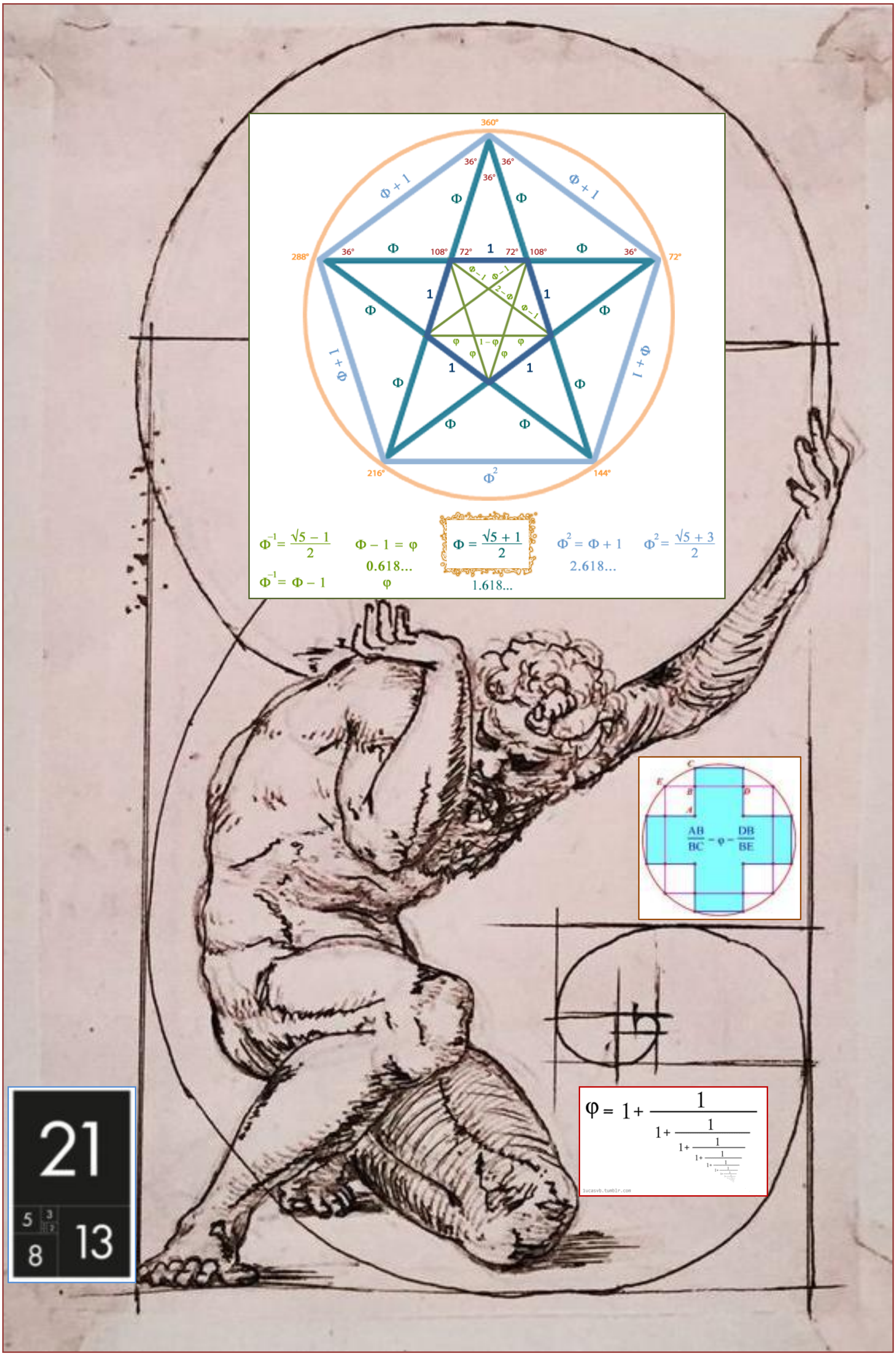


Formulujme to presnejšie: *Dve telesá rovnakej výšky majú rovnaký objem, ak ich rovinné rezy v rovnakej výške majú vždy rovnako veľkú plochu*. Ešte všeobecnejšie: *Ak pre dve telesá existuje taká rovina, že každá s ňou rovnobežná rovina pretína tieto telesá v útvaroch s rovnakým obsahom, tak objemy týchto telies sa rovnajú*. Táto myšlienka sa nazýva **Cavalieriho princíp**.

Taliansky matematik Bonaventura Cavalieri (asi 1598 – 7. 9. 1647) vo svojich odborných prácach rozvinul myšlienky, ktoré viedli k vzniku infinitezimálneho počtu. Jeho *Geometria indivisibilium continuorum quadam ratione promota* (1635) podnietila mnohých matematikov k štúdiu problémov dnešného diferenciálneho a integrálneho počtu. Cavalieri vydal aj knihu o uplatnení logaritmov v astronomických výpočtoch (1632) a zbierku úloh o používaní logaritmov v rôznych oblastiach vtedajšej náuky (1639). Študoval súvislosti medzi geometrickou optikou a teóriou kužeľosečiek. Vydal aj spis o trigonometrii (1643) a celý rad ďalších pojednaní. V roku jeho úmrtia vyšla publikácia *Šesť etúd o geometrii*, kde rozvinul a doplnil svoje predstavy „*metódy nedeliteľných*“ (bod je nedeliteľný pre čiaru, čiara je nedeliteľná pre rovinu, rovina je nedeliteľná pre teleso; nedeliteľné je schopné vytvárať pohybom kontinuum priestoru o jeden rozmer väčšieho;).

Porovnávanie nedeliteľných je užitočné pre postupy na určovanie obsahov a objemov. Bonaventura Cavalieri predurčil cestu k užitočnému ntegrálnemu počtu.

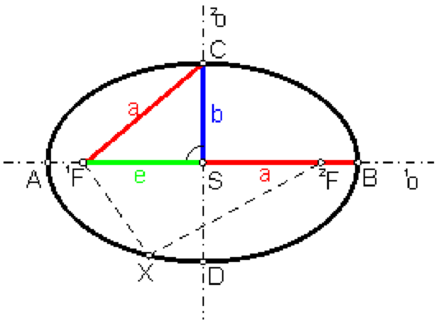



360°
36°
36°
36°
Φ + 1
Φ + 1
Φ
Φ
288°
36°
Φ
108°
72°
1
72°
108°
Φ
36°
72°
1
1
Φ
Φ
Φ + 1
Φ + 1
1
1
Φ
Φ
Φ
Φ
216°
Φ²
144°
Φ⁻¹ = (√5 − 1)/2
Φ − 1 = φ
0.618...
φ
Φ = (√5 + 1)/2
1.618...
Φ² = Φ + 1
2.618...
Φ² = (√5 + 3)/2
Φ⁻¹ = Φ − 1
AB/BC = φ = DB/BE
φ = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/...)))
21
5
3
8
13

Elipsa je množina všetkých bodov v rovine $\mathbf{E_2}$, ktoré majú od dvoch rôznych bodov $^1\mathbf{F}$, $^2\mathbf{F}$ stály súčet vzdialeností rovný 2**a**, pričom $2\mathbf{a} > |^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}|$.

(1) Symbolický zápis: **elipsa** $= \{\mathbf{X} \in \mathbf{E_2};\ |\mathbf{X}^1\mathbf{F}|+|\mathbf{X}^2\mathbf{F}| = 2\mathbf{a},\ 2\mathbf{a} > |^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}|\}$

Pojmy a ich označenie (obr.1)



Obr. 1.

$^1\mathbf{F}$, $^2\mathbf{F}$ – ohniská
$^1\mathbf{o}$ – hlavná os ($^1\mathbf{o} = {}^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}$)
$^2\mathbf{o}$ – vedľajšia os (os úsečky $^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}$)
S – stred
A, **B** – hlavné vrcholy
C, **D** – vedľajšie vrcholy

a – dĺžka hlavnej polosi	$\mathbf{a} = \lvert\mathbf{AS}\rvert = \lvert\mathbf{BS}\rvert$
b – dĺžka vedľajšej polosi	$\mathbf{b} = \lvert\mathbf{CS}\rvert = \lvert\mathbf{DS}\rvert$
e – excentricita	$\mathbf{e} = \lvert^1\mathbf{FS}\rvert = \lvert^2\mathbf{FS}\rvert$

$\Delta^1\mathbf{FSC}$ - charakteristický trojuholník

Dĺžky **a**, **b** $\dfrac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^2}{\mathbf{a}} + \dfrac{(\mathbf{y}-\mathbf{n})^2}{\mathbf{b}} = 1$ reprezentujú konštanty v rovnici elipsy so stredom **S**(**m**;**n**) .
Vzťah medzi dĺžkami **a**, **b** vyjadruje Pytagorova veta $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{e}^2$.

Dané sú ohniská $^1\mathbf{F}$, $^2\mathbf{F}$ a úsečka **KL** dĺžky 2**a**, $2\mathbf{a} > |^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}|$.
Zostrojme elipsu ako množinu bodov s vlastnosťou (1).

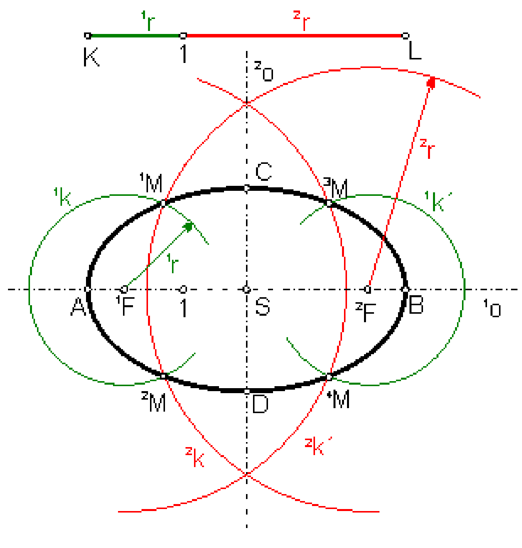
Úsečku **KL** je vhodné umiestniť na os $^1\mathbf{o}$ tak, aby sa jej stred stotožnil so stredom úsečky $^1\mathbf{F}^2\mathbf{F}$, potom krajné body **K**, **L** sa stotožnia s hlavnými vrcholmi **A**, **B** elipsy. Bod **1** a ďalšie pomocné body volíme medzi bodmi $^1\mathbf{F}$ a **S**.

Body elipsy získame v prieniku kružníc:
$^1\mathbf{k} \cap {}^2\mathbf{k} = \{^1\mathbf{M}, {}^2\mathbf{M}\}$, $^1\mathbf{k}' \cap {}^2\mathbf{k}' = \{^3\mathbf{M}, {}^4\mathbf{M}\}$,
pričom

$^1\mathbf{r} = |\mathbf{A1}|$, $^2\mathbf{r} = |\mathbf{B1}|$,

$^1\mathbf{k}(^1\mathbf{F}; {}^1\mathbf{r})$, $^1\mathbf{k}'(^2\mathbf{F}; {}^1\mathbf{r})$,

$^2\mathbf{k}(^2\mathbf{F}; {}^2\mathbf{r})$, $^2\mathbf{k}'(^1\mathbf{F}; {}^2\mathbf{r})$.



Obr. 2.

Každý z bodov $^i\mathbf{M}$, i = 1, ..., 4 spĺňa vlastnosť: $|^i\mathbf{M}^1\mathbf{F}| + |^i\mathbf{M}^2\mathbf{F}| = 2\mathbf{a}$, je teda bodom elipsy. Vhodnou voľbou ďalších pomocných bodov a opakovaním konštrukcie získame nové štvorice bodov elipsy. Z konštrukcie vyplýva, že elipsa je súmerná podľa osí $^1\mathbf{o}$, $^2\mathbf{o}$ aj podľa stredu **S**.

http://www.evlm.stuba.sk/~szarkova/texty/Kuzeloseckyw_soubory/elipsa.gif

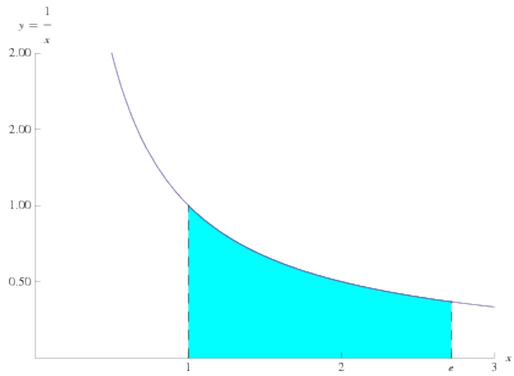
Eulerovo číslo *e* = 2,718281828...

2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642 74

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Éčko sa pre túto konštantu používa od roku 1736, keď Leonhard Euler publikoval svoju prácu *Mechanica*.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$



Eulerovo číslo ako jediné číslo $x > 0$, pre ktoré platí,

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln e = 1.$$

Platí $e^{i\pi}+1=0$.

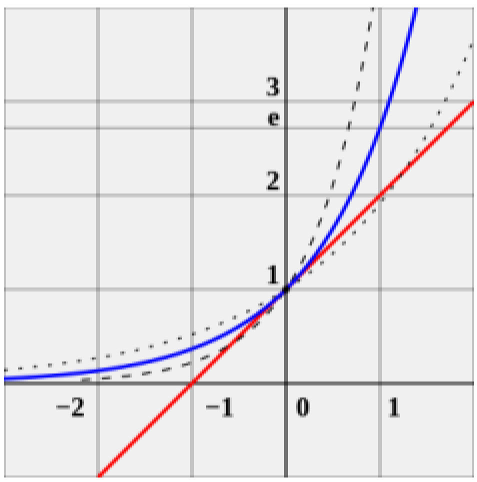
Je to špeciálny prípad všeobecnejšieho vzťahu, ktorý dáva do súvisu funkcie sínus, kosínus a exponenciálnu funkciu $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

$$e^r = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{r}{N}\right)^N$$

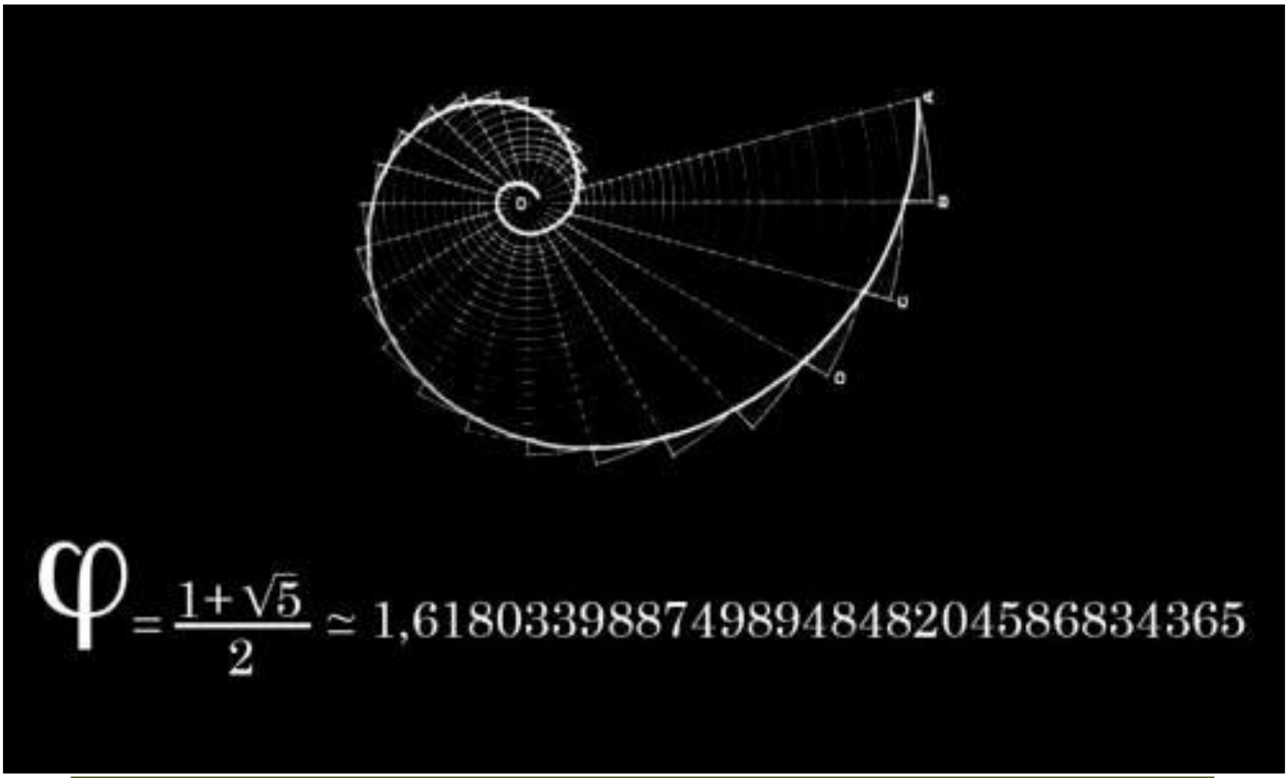
Pre akýkoľvek úrok *r*, platí, že pri N približujúcom sa k nekonečnu, hodnota zloženého úročenia, ktorú nikdy neprekročíme, je *éčko* umocnené na daný úrok. Hovoríme teda, že *éčko* umocnené na daný úrok *r* je limitou postupnosti, kde počet časových období, kedy banka pripisuje úrok, rastie do nekonečna (N=>∞). Pri neustálom skracovaní náš výnos síce bude rásť do nekonečna, ale to nekonečno bude vyjadrené nárastom iba v desatinnom rozvoji na neustále vzdialenejších desatinných miestach – jeho nedosiahnuteľný strop bude tvoriť nekonečný rozvoj čísla e^r.

e^x je taká exponenciálna funkcia, ktorej derivácia v bode x sa rovná funkčnej hodnote v tomto bode.

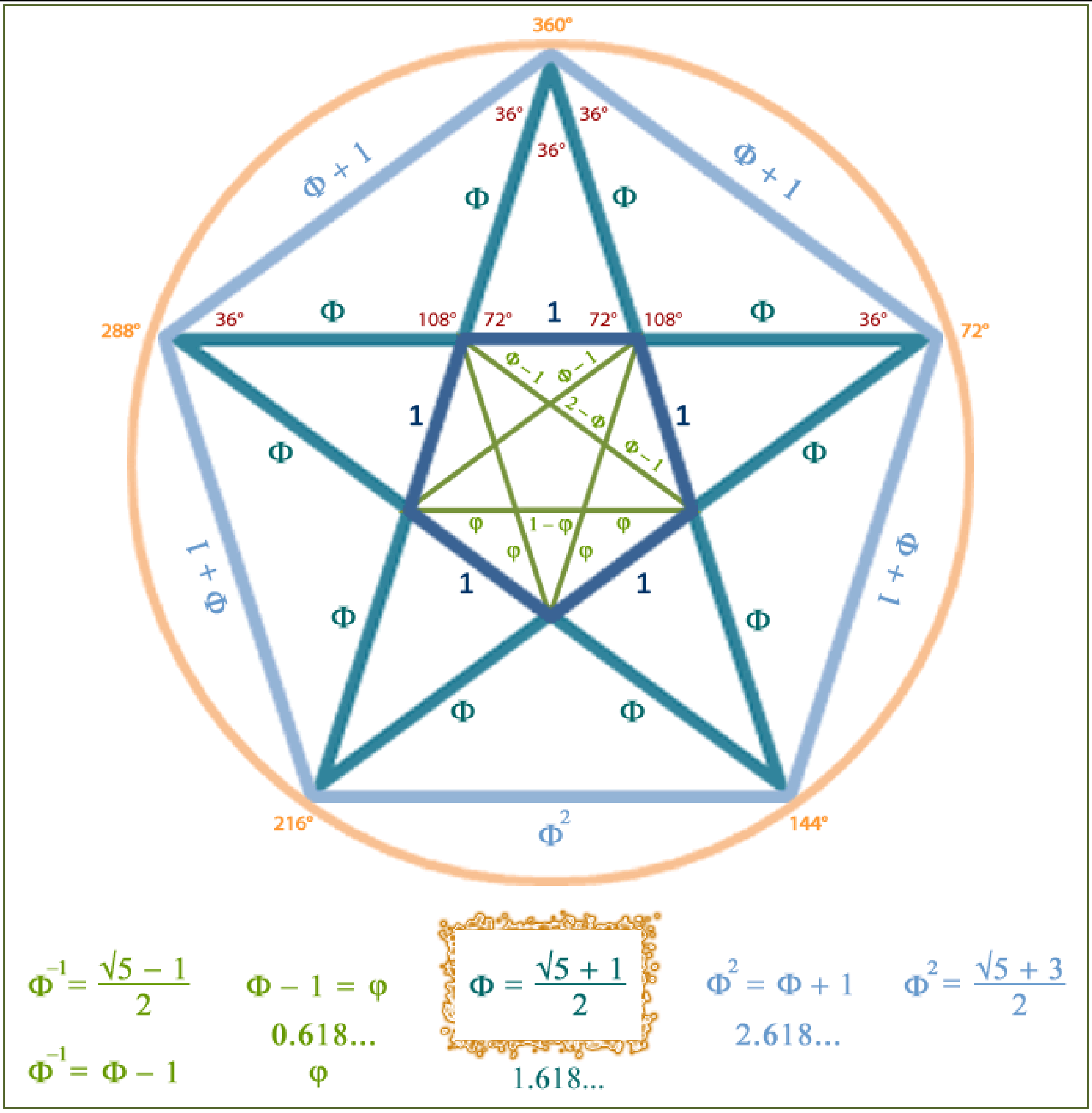
$$\boxed{e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{\dots}}}}}$$



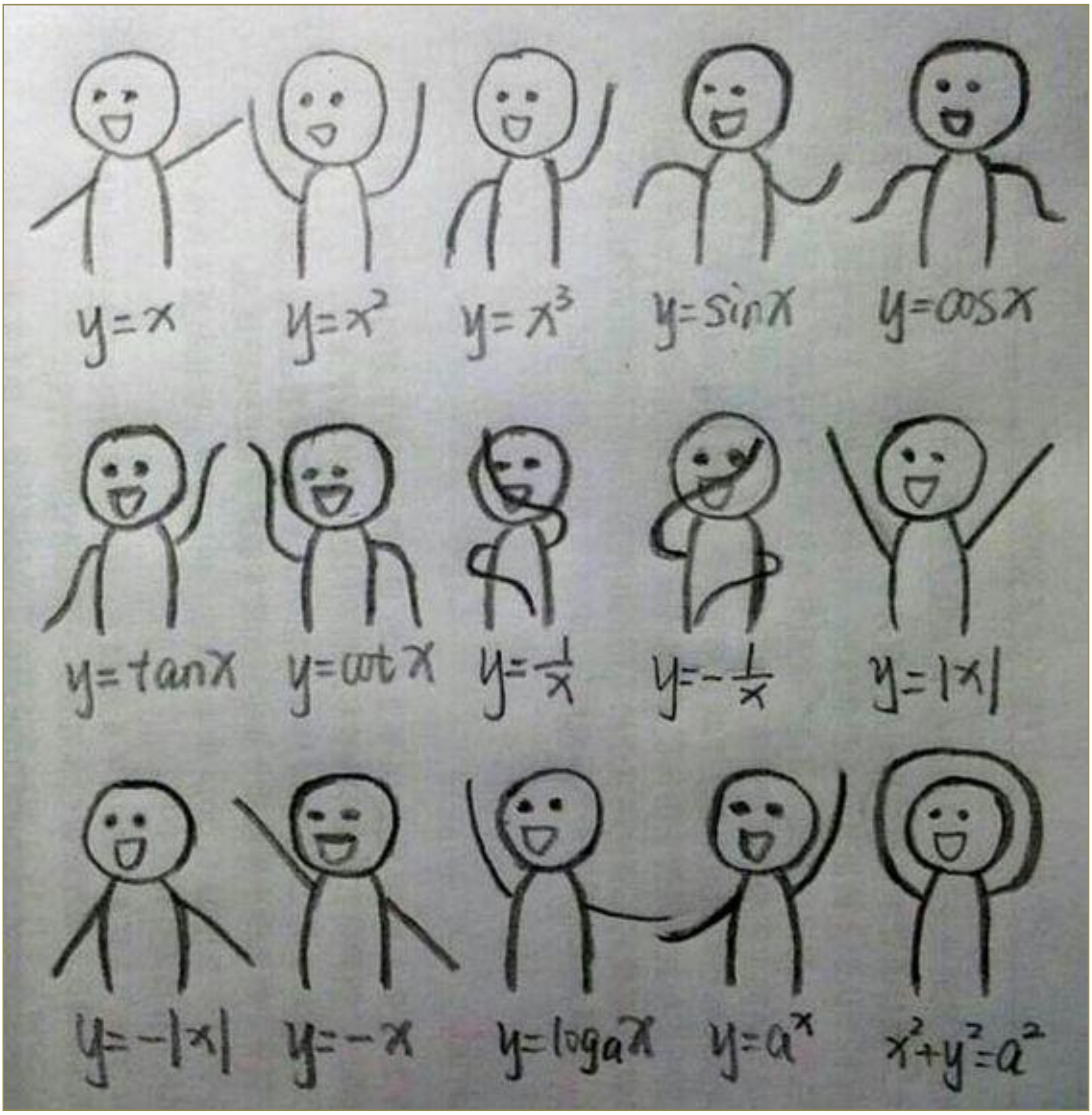
https://www.youtube.com/watch?v=ubC78HcYq9w

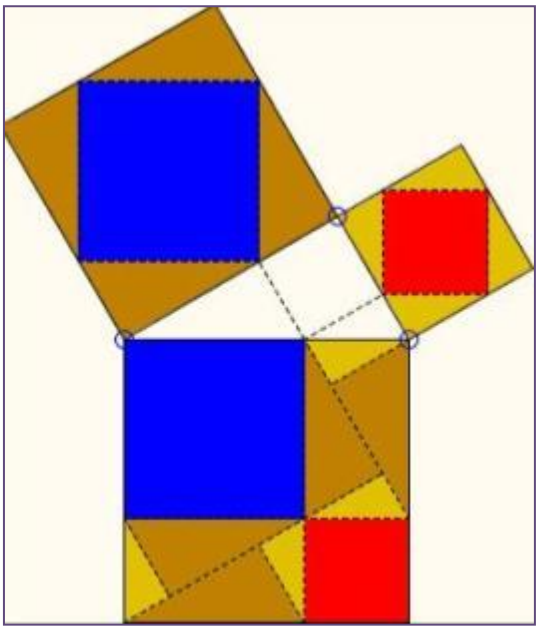


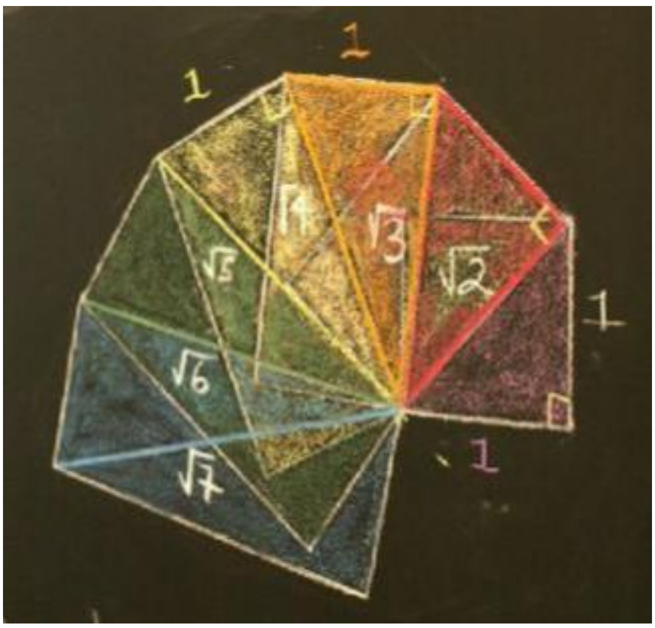
φ = (1+√5)/2 ≃ 1,618033988749894848204586834365



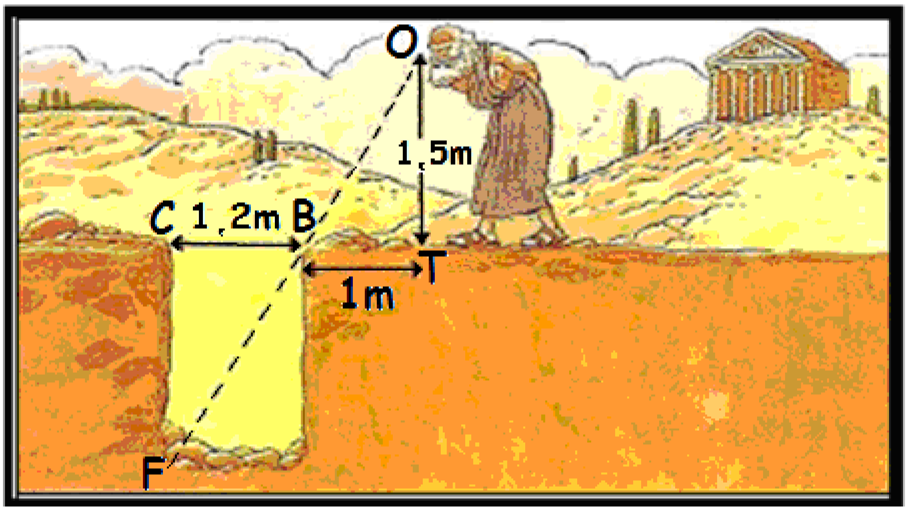
360°
72°
144°
216°
288°
36°
72°
108°
Φ + 1
Φ
1
Φ²
Φ – 1
2 – Φ
1 – φ
φ
$\Phi^{-1} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$
$\Phi^{-1} = \Phi - 1$
$\Phi - 1 = \varphi$
0.618...
φ
$\Phi = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$
1.618...
$\Phi^2 = \Phi + 1$
2.618...
$\Phi^2 = \dfrac{\sqrt{5} + 3}{2}$


$y=x$
$y=x^2$
$y=x^3$
$y=\sin x$
$y=\cos x$
$y=\tan x$
$y=\cot x$
$y=\frac{1}{x}$
$y=-\frac{1}{x}$
$y=|x|$
$y=-|x|$
$y=-x$
$y=\log_a x$
$y=a^x$
$x^2+y^2=a^2$

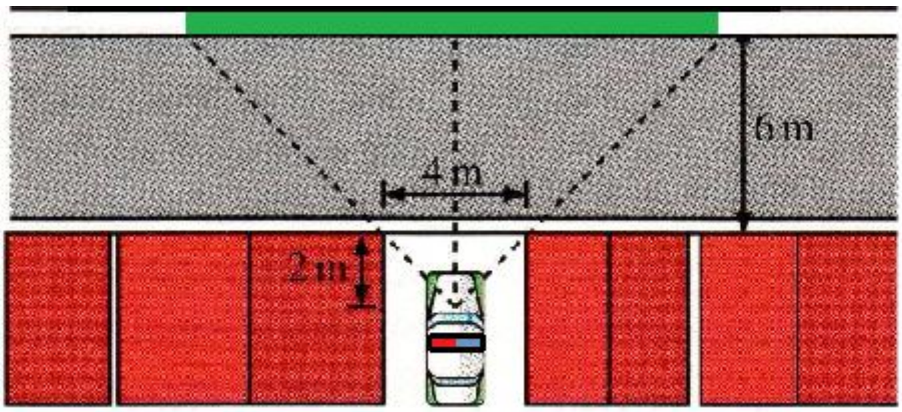



1
1
1
1
$\sqrt{2}$
$\sqrt{3}$
$\sqrt{4}$
$\sqrt{5}$
$\sqrt{6}$
$\sqrt{7}$

Obrázkové úlohy

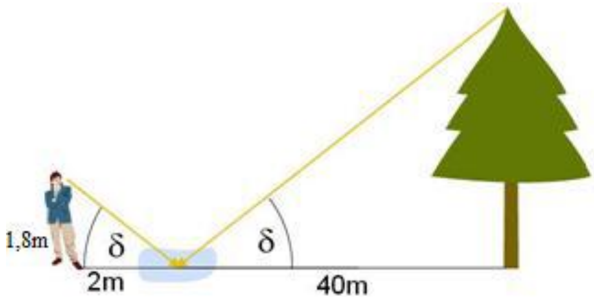


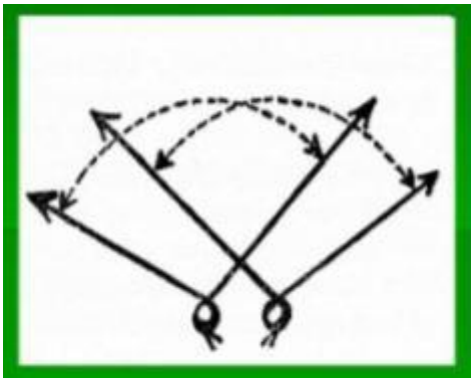
Táles je vzdialený 1 m od jamy. Oči má vo výške 150 cm nad zemou a pozerá do jamy s priemerom 120 cm podľa obrázka. Vypočítajte hĺbku jamy.



V uličke stojí policajné auto. Aký dlhý úsek z chodníka oproti má vo výhľade? Aký dlhý úsek by videl, keby podišiel ku hlavnej ceste o jeden meter?

Vrch stromu sa zrkadlí v kaluži, ktorá je vzdialená 40 m. Ty stojíš od tejto kaluže 2m. Pozri obrázok. Aký vysoký je strom?





Uhol celkového zorného poľa človeka (obidvoch očí) je asi 200°. Zorný uhol jedného oka je asi 160°. Prienik zorného poľa pravého a ľavého oka (teda oblasť, ktorú vidíme obidvomi očami súčasne) je oblasť, ktorú dokážeme vidieť priestorovo (trojrozmerne). Vypočítajte veľkosť zorného uhla oblasti, ktorú vidíme priestorovo.

Potešenie z vyriešenia primeraných M-úloh

Uplatnenie základných matematických vedomostí (zo ZŠ alebo SŠ) môže byť aj tvorivou radosťou po vyriešení aspoň niektorých z predložených úloh: uplatnením experimentu, pokusu a omylu, jednoduchým úsudkom, vtipnou intuíciou, osvedčenou predstavivosťou, spomienkou na základné matematické zručnosti. Odmenou budú podnetné myšlienky o matematickej kultúre od významných osobností z rôznych oblastí ľudskej činnosti.

1. Digitálne hodinky ukazujú čas 19:57:33. Za koľko sekúnd sa prvý raz zmenia všetky číslice?

2. Kocka ofarbená na červeno je rozrezaná na 125 malých kociek. Koľko z nich nemá ani jednu stenu nafarbenú na červeno?

3. Priemerný vek deviatich ľudí v prvej skupine je 25 rokov. Priemerný vek iných jedenástich ľudí v druhej skupine je 45 rokov. Aký je priemerný vek všetkých osôb v oboch skupinách?

4. Cena prístroja po dvoch zlacneniach, postupne vždy o 20 %, bola 320 €. Aká bola pôvodná cena prístroja?

5. V akom najväčšom počte bodov sa môže pretínať osem rôznych kružníc?

6. Stanovte, ktoré z čísiel 4^{15}, 8^{11}, 16^{8}, 32^{6} je najväčšie.

7. Koľko rôznych trojčlenných skupín (v nich nezáleží na poradí) možno zostaviť z troch manželských párov (muž – žena) tak, aby v žiadnej trojici nebol manželský pár?

8. Staršie ručičkové hodinky sa oneskorujú o tri minúty za hodinu. Nastavil som si na nich presný čas. Kedy najskôr ukážu zase presný čas?

9. Za nákup v cene 120 € som zaplatil túto sumu spolu 36 kusmi dvoj–eurových alebo päť–eurových mincí. Koľko z toho bolo päť–eurových?

10. Otec má 52 rokov a jeho dvaja synovia 24 a 18 rokov. Za koľko rokov bude mať otec toľko rokov ako jeho synovia spolu?

11. Napriek tomu. že cena jednej vstupenky na kúpalisko vzrástla o 40 %, sa za predané vstupenky vybralo len o 26 % viac. O koľko percent klesla návštevnosť kúpaliska?

12. Počet zúčastnených cvičencov je medzi 500 až 1000. Ak vytvoríme z nich rovnaké skupiny buď po 18 cvičencov alebo po 20 alebo po 24 študentov, vždy zostane 9 cvičencov naviac. Presne koľko cvičencov sa zúčastnilo?

13. Aká je veľkosť vnútorného uhla pravidelného *n*–uholníka, ktorý má práve 20 uhlopriečok?

14. Tento rok sa počet súťažiacich zvýšil oproti minulému roku o 32 %. Vlani sa zúčastnilo 55 % dievčat, tento rok iba 50 % dievčat. Ako sa zmenil tento rok počet dievčat oproti minulému roku?

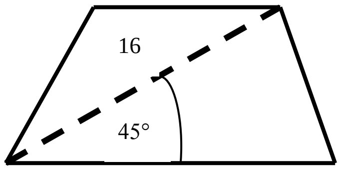
15. V stáde tiav (boli tam jednohrbé aj dvojhrbé) bolo napočítaných 28 hláv a 45 hrbov. Stanovte, koľko jednohrbých tiav bolo v tomto stáde.

16. Spojením vrcholov *A, B, C, D* kocky *ABCDEFGH* s vrcholom *H* vznikne štvorsten *ABCDH*. Stanovte, akú časť objemu kocky predstavuje objem tohto štvorstena.

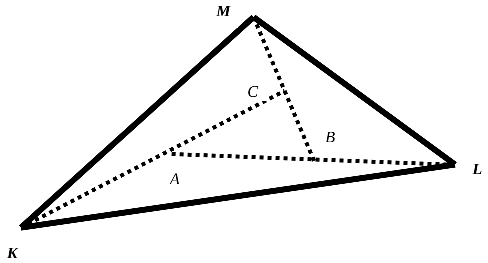
17. Stanovte koľkokrát použijeme číslicu 5, ak napíšeme všetky prirodzené čísla od 1 do 1000.

18. V rovnoramennom trojuholníku je veľkosť uhla medzi osami vnútorných uhlov pri základni trojnásobkom veľkosti vnútorného uhla pri vrchole trojuholníka. Stanovte veľkosti vnútorných uhlov tohto rovnoramenného trojuholníka.

19. Uhlopriečka rovnoramenného lichobežníka má dĺžku 16 *cm* a zviera so základňou lichobežníka uhol 45°. Stanovte obsah tohto lichobežníka (obr.).



20. Ak predĺžime každú stranu trojuholníka *ABC* na dvojnásobok (pozri obr.), dostaneme trojuholník *KLM*. Stanovte obsah trojuholníka *KLM*, ak obsah trojuholníka *ABC* je 1.



Vyhodnotenie

Posúďte výsledky bystrosti vášho rozumu a získaných vedomostí aj podľa úspešnosti v tomto teste. Zamyslite sa nad dole citovanými pozoruhodnými myšlienkami významných osobností.

20 b – 18 b: ***Matematika je*** *najväčšia potecha rozumu. Jej je treba dať prednosť pred ostatnými ľudskými bádaniami a vedami* (Leonardo da Vinci, renesančný architekt, sochár, maliar, vynálezca; 1452–1519).

17 b – 15 b: ***Matematika je*** *orgán vnútorného vyššieho zmyslu. Ak sa používa, stáva sa umením ako výrečnosť* (J. W. Goethe, nemecký básnik, dramatik, historik, právnik i politik; 1749–1832).

14 b – 11 b: ***Matematika je*** *monumentálna stavba, postavená ľudskou predstavivosťou pre pochopenie vesmíru. V nej sa stretneme s okolitým a nekonečným, uchvacujúcim a nevystihnuteľným* (Le Corbusier, francúzsko–švajčiarsky architekt, urbanista, sochár; 1887–1965).

10 b – 6 b: ***Matematika je*** *najmocnejší intelektuálny nástroj, ktorý bol kedy vytvorený a prostredníctvom ktorého unikáme času* (L. Kolakowski, poľský filozof a historik; 1927–2009).

5 b – 0 b: ***Matematika je*** *univerzálny symbolický jazyk, ktorý sa nezaoberá opisom vecí, ale všeobecným vyjadrovaním vzťahov...* ***Matematika je*** *sprostredkujúca sféra medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom* (E. Cassirer, nemecký filozof a historik vedy; 1874–1945).

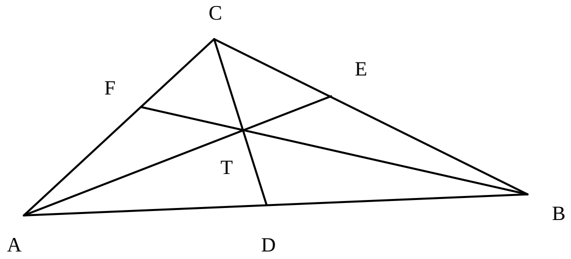
Správne odpovede

1. **147**; 2. **27**; 3. **36**; 4. **500 €**; 5. **56**; 6. **16^8**; 7. **8**; 8. **za 10 dní**; 9. **16**;
10. **10**; 11. **10%**; 12. **729**; 13. **135°**; 14. **zvýšil o 20%**; 15. **11**; 16. **1/3**;
17. **300**; 18. **36°, 72°, 72°**; 19. **128 cm^2**; 20. **7**;

(vybral a zostavil *Dušan Jedinák*)

VYBRANÉ ÚLOHY Z PYTAGORIÁDY

1. Stanovte, koľko rôznych trojuholníkov možno „vyčítať“ z obrázku:



2. Stanovte, o koľko eur je sveter drahší ako košeľa, keď sveter a dve košele stoja 28 eur a dva svetre spolu s jednou košeľou stojí 44 eur.

3. Stanovte, aký počet číslic napíšem, ak očíslujem (1, 2, 3,...) všetky strany v zošite, ktorý má 20 listov.

4. Stanovte rozdiel najväčšieho štvorciferného prirodzeného čísla deliteľného štyrmi a najmenšieho štvorciferného prirodzeného čísla deliteľného dvomi.

5. Stanovte, koľko šnúr by navlieklo osem strojov za 30 minút, ak viete, že za 20 minút navlečie jeden stroj 12 šnúr.

6. Stanovte súčet všetkých prirodzených deliteľov čísla 150.

7. Stanovte počet čísel, ktoré použijem, ak píšem za sebou prirodzené čísla od 1 do 40 (vrátane).

8. Stanovte počet žiakov, ktorí zaplatili za poistné po 5 €, ak viete, že poistné na jedného žiaka bolo buď 3 € alebo 5 € a 30 žiakov zaplatilo spolu 130 €.

9. Stanovte obsah obdĺžnika, ak jeho obvod je 80 cm a dĺžky jeho strán sú v pomere 3 : 5.

10. Stanovte, o koľko je polovica šestiny menšia ako dve tretiny z troch šestín.

11. Stanovte počet rôznych trojciferných nepárnych prirodzených čísel, ktoré možno vytvoriť z cifier 3, 4, 5, 6, 7 bez opakovania.

12. Stanovte, v akom pomere je obvod ΔKLM a obvod ΔXYZ, ak v ΔKLM sú body X, Y, Z stredy strán.

13. Stanovte najväčšie štvorciferné prirodzené číslo, ktorého súčin cifier je 1080.

14. Vo vnútri štvorca $ABCD$ je rovnostranný ΔABK. Stanovte veľkosť uhla CKB.

15. Stanovte, o koľko percent sa zväčší povrch kocky, ak jej hranu zväčšíme o 20 %.

16. Stanovte, koľko motorov opravia priemerne siedmi mechanici za päť dní, ak viete, že traja mechanici opravia priemerne za tri dni deväť motorov.

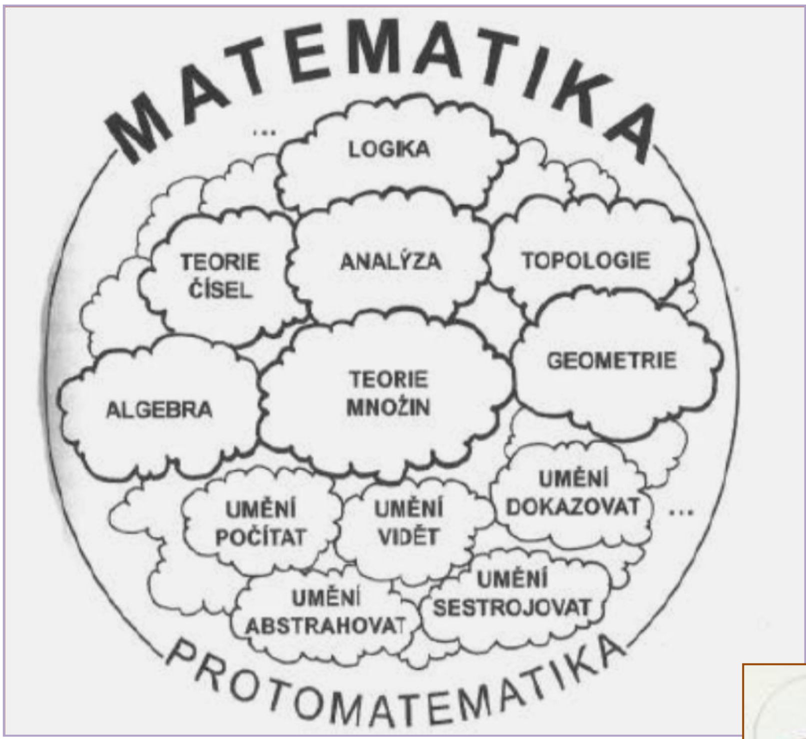
17. Stanovte počet všetkých prirodzených trojciferných čísel, v zápise ktorých sa vyskytuje aspoň raz číslica nula.

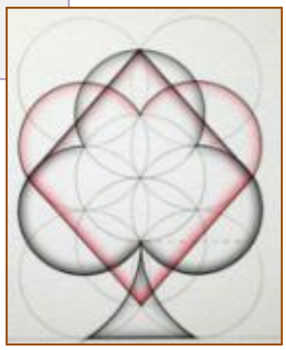
18. Body A, B, C sú stredy strán ΔKLM. Body E, F, G sú stredy strán ΔABC. Stanovte obsah ΔKAC, ak viete, že obsah ΔEFG je 9 cm^2.

19. Stanovte súčet všetkých prirodzených párnych deliteľov čísla 2014.

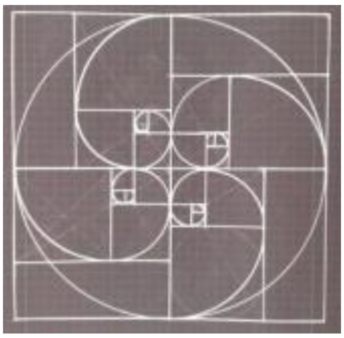
20. Stanovte, ktorou číslicou končí dekadický zápis čísla 2014^{2014}.

(16; 16; 71; 8996; 144; 372; 71; 20; 375; ¼ ; 36; 2 : 1; 9853; 75°; 44; 35; 171; 36; 2160; 6)





Thales z Milétu (−620 až −546)
Anaximandros (−610 až −546)
Pythagoras ze Samu (−590 až −500)
Anaximenes (−585 až −527)
Herakleitos (−540 až −480)
Anaxagoras z Klazomén (−500 až −428)
Leukippos z Milétu (−490 až −420)
Zenon z Eleje (−490 až −430)
Sokrates (−469 až −399)
Démokritos z Abdér (−460 až −370)
Platon (−427 až −347)
Eudoxos z Knidu (−408 až −355)
Herakleides z Pontu (−388 až −315)
Aristoteles ze Stageiry (−384 až −322)
Eukleides z Alexandrie (−325 až −265)
Aristarchos ze Samu (−310 až −230)
Ktesibios (−300 až −250)
Archimédes ze Sykarus (−287 až −212)
Erastosthenes z Kyrény (−276 až −194)
Apollonius z Pergy (−262 až −190)
Filon z Byzantia (−200 až −150)
Hipparchos z Nikaie (−190 až −120)
Titus Lucretius Carus (−97 až −55)
Lucius Seneca (−4 až 65)
Heron Alexandrijský (10 až 70)



Většina lidí si nechá uniknout, jak je matematika krásná. Pro mne je její nejbližší analogií horolezectví, hledání cesty velkou a složitou stěnou, kde se větví varianty dalšího postupu, kde potřebujete sílu a šikovnost, ale hlavně musíte umět přečíst skálu, poznat její strukturu, její skryté vzorce.
Matematika není věda o číslech, ale o strukturách.
Ing. Petr Koubský, CSc.

Podmienky nevyhnutné a postačujúce v matematickej vete $\forall\, x \in D;\, A(x) \Rightarrow B(x)$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B' \Rightarrow A'$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

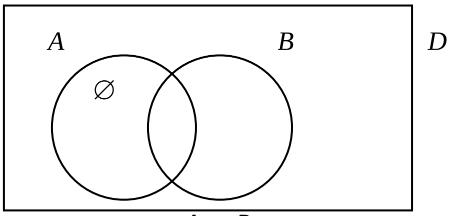
A implikuje B

z A vyplýva B

ak A, tak B

ak platí A, tak platí B

A má dôsledok *B*
(*B je dôsledkom A*)

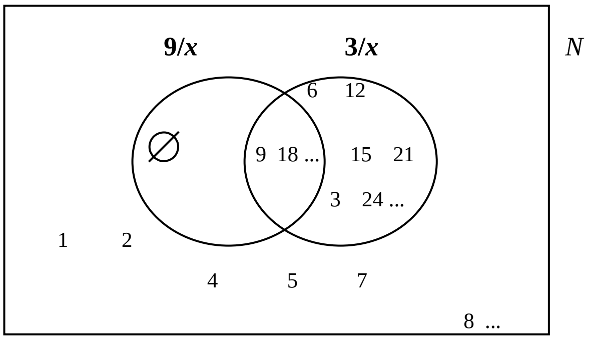


$A \subset B$

$\forall\, x \in D;\, A(x) \Rightarrow B(x)$

Platnosť *A* je postačujúcou podmienkou pre platnosť *B*.
Platnosť *B* je nevyhnutnou podmienkou pre platnosť *A*.

Napríklad: $\forall\, x \in N;\ 9/x \Rightarrow 3/x$
(deliteľnosť deviatimi je postačujúca pre deliteľnosť tromi, ale nie je to podmienka nevyhnutná; deliteľnosť tromi je nevyhnutná pre deliteľnosť deviatimi, ale nie je to postačujúca podmienka)



Zrejme platí pre každé celé čísla x, y : $(x > 2 \wedge y > 2) \Rightarrow x \cdot y > 4)$
$A \Rightarrow B$

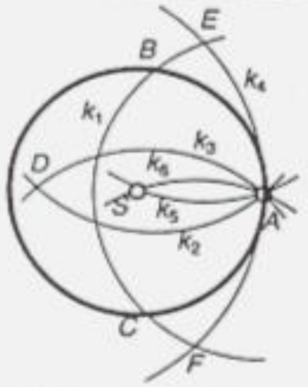
teda platnosť A: $(x > 2 \wedge y > 2)$ je **postačujúcou podmienkou** pre platnosť B: $x \cdot y > 4$, ale nie nevyhnutnou;
platnosť B: $x \cdot y > 4$ je **nevyhnutnou podmienkou** pre platnosť A: $(x > 2 \wedge y > 2)$, ale nie postačujúcou.

*Doporučil bych každému universitnímu studentovi, nezávisle na oboru, v němž se specializuje, aby absolvoval alespoň **elementární kurz moderní logiky**. Moje motivace není výlučně intelektuální. Hlavní problém, před kterým dnes stojí lidstvo, je problém normalizace a racionalizace vztahu mezi lidmi. Nemám iluze, že rozvoj logiky – nebo v tomto ohledu jakékoli jiné teoretické vědy – povede sám o sobě k uspokojivému řešení tohoto problému, ale věřím, že větší rozšíření znalostí logiky může k jeho řešení pozitivně přispět. Neboť na jedné straně tím, že logika zpřesňuje a sjednocuje významy pojmu ve své vlastní oblasti, a že zdůrazňuje nutnost takového zpřesňování a sjednocování v každém jiném oboru, vede k možnosti lepšího porozumění mezi těmi, kdo mají vůli ho dosáhnout. A na druhé straně tím, že zdokonaluje a zjemňuje nástroje myšlení, činí lidi kritičtějšími a zmenšuje tak pravděpodobnost toho, že budou zavedeni všemi možnými pseudoúvahami, jimž jsou dnes neustále vystaveni v různých částech světa.* Alfred TARSKI (1902–1983)

MATEMATIKA HROU

ROVINNÉ GEOMETRICKÉ
KONŠTRUKCIE
IBA KRUŽIDLOM

Viete nájsť stred už nakreslenej kružnice iba pomocou kružidla?

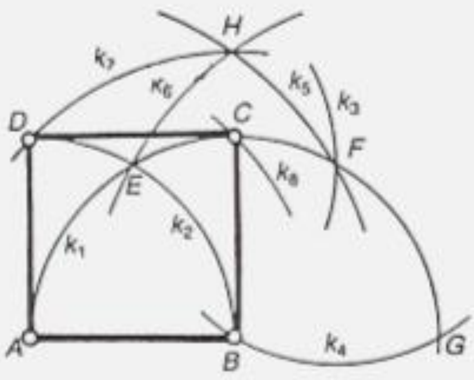


$k_1(A, AB)$
$k_2(B, BA)$
$k_3(C, CA)$
$k_2 \cap k_3 \equiv D$
$k_4(D, DA)$
$k_4 \cap k_1 \equiv E \equiv F$
$k_5(E, EA)$
$k_6(F, FA)$
$k_5 \cap k_6 \equiv S$

V diele Geometrie del compaso dokázal taliansky matematik Lorenzo Mascheroni (1750-1801), že všetky úlohy riešiteľné lineárom a kružidlom sú riešiteľné tiež iba kružidlom.

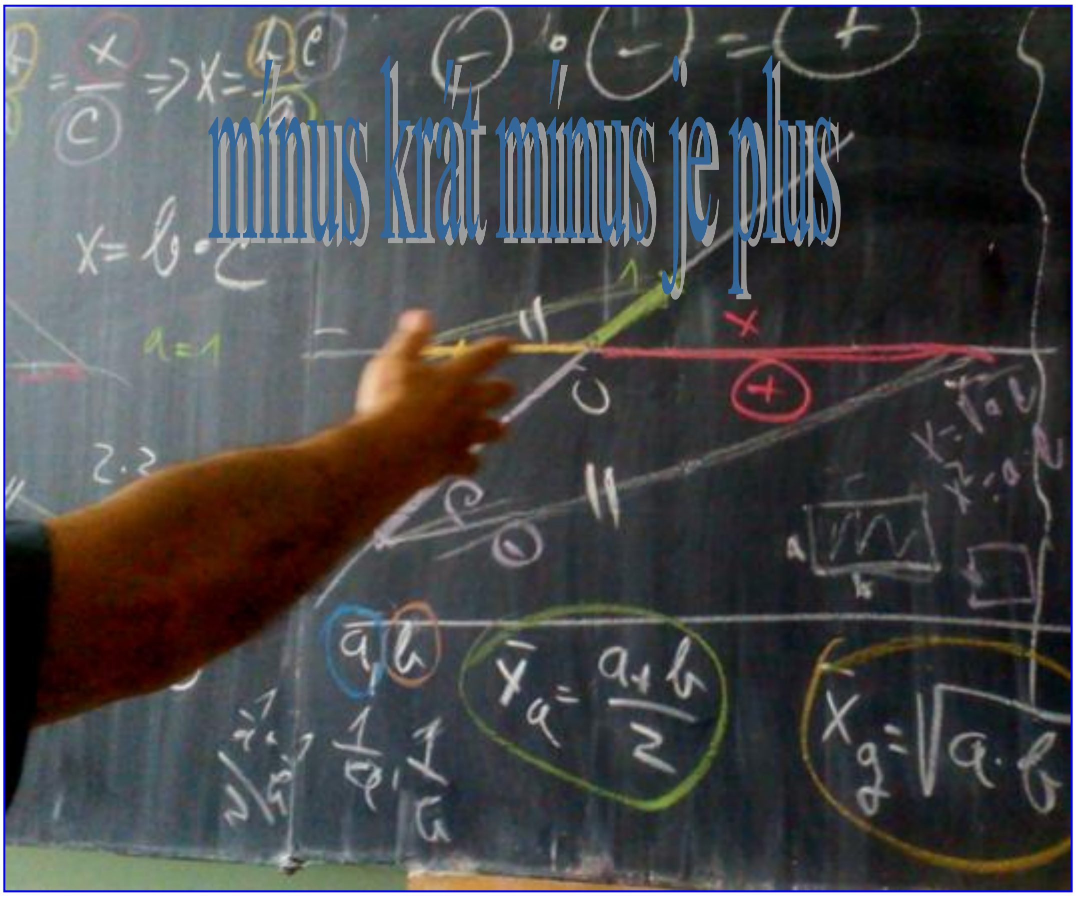
KAŽDÁ EUKLIDOVSKÁ KONŠTRUKCIA JE USKUTOČNITEĽNÁ POUŽITÍM KRUŽIDLA AKO JEDINÉHO RYSOVACIEHO NÁSTROJA:

Viete dokázať, že naznačeným postupom je skonštruovaný štvorec ak je daná veľkosť jeho strany?



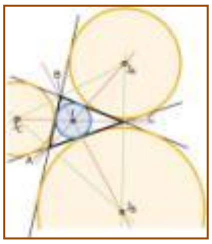
$k_1(B, a)$
$k_2(A, a)$
$k_1 \cap k_2 \equiv E$
$k_3(E, a)$
$k_3 \cap k_1 \equiv F$
$k_4(F, a)$
$k_4 \cap k_1 \equiv G$
$k_5(A, AF)$
$k_6(G, AF)$
$k_5 \cap k_6 \equiv H$
$k_7(B, BH) \cap k_2 \equiv D$
$k_8(A, BH) \cap k_1 \equiv C$

Skúste dokázať, že hore uvedené postupy konštrukcie *iba kružidlom* sú správne. Budeme tým postupom zostrojovať stred danej (nakreslenej) kružnice alebo ďalšie dva vrcholy štvorca, ak sú dané dva susedné vrcholy tohto štvorca, **iba kružidlom**!



Systematicky rozvíjaná a používaná **matematická kultúra** umožňuje:

1. rozvoj abstraktného myslenia a praktických idealizácií, možnosť odhalenia všeobecných zákonov a hlbšej podstaty sveta;
2. návyk na presné formulovanie problémov, definovanie pojmov a spresňovanie významu slov i pre tvorivé využívanie ľudského intelektu všeobecne;
3. hospodárnosť úvah, logické zdôvodňovanie a argumentovanie (overovanie hypotéz, správnosť úsudkov, protipríklady);



4. odovzdávanie matematických postupov (jazyk, symbolika, štruktúry, deduktívna výstavba, algebraizácia, dôkazové metódy);
5. uplatnenie vhodných výpočtových algoritmov a počítačovej techniky, praktické aplikácie v technickej a technologickej praxi;
6. rozvoj systémových kombinačných schopností a pravdepodobnostných i štatistických odhadov (združovanie a organizovanie údajov, predpovede, kontroly);
7. podnety pre analýzu i syntézu rôznorodých problémov a postupov ich riešenia, (matematizácia reálnych situácií, stratégia odhadov);
8. geometrickú predstavivosť, schopnosť znázorňovať a využívať zhodnosť i podobnosť;
9. možnosť predvídania pomocou formálnych kalkulov s dobrou mierou spoľahlivosti;
10. vyhľadávanie spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú, zjednodušujú a umožňujú pochopiteľnosť prírody i človeka v nej.

K základom logického uvažovania

1. Ktorý z nasledujúcich obrázkov nevznikol pootočením (v rovine) obrázku

a) b) c) d)

2. Koľkými nulami končí číslo, ktoré je súčinom prvých 2008 prvočísiel?
a) tromi b) jednou c) žiadnou d) dvetisícimi

3. Počas určitého kalendárneho mesiaca bola trikrát nedeľa párnym dňom.
Aký deň bol 20-teho v tom mesiaci?
a) štvrtok b) piatok c) sobota d) nedeľa

4. Nech je dnes pondelok. Aký deň bude o 100 dní?
a) pondelok b) utorok c) streda d) štvrtok

5. Ktorý z dole uvedených výrazov je výrok?
a) Čím skôr. b) Prines vodu! c) $3 > 5$ d) $2 + 7$

6. Negáciou výroku *Každý večer príde Peter alebo Eva* je
a) *Žiadny večer nepríde Peter ani Eva.*
b) *Každý večer príde Peter aj Eva.*
c) *Niektorý večer príde Peter alebo Eva.*
d) *Niektorý večer nepríde Peter ani Eva.*

7. Negáciou výroku *Všetci žiaci sú výborní* je výrok
a) *Existujú žiaci, ktorí nie sú výborní.*
b) *Všetci žiaci sú slabí.*
c) *Môj žiak je výborný.*
d) *Žiadni žiaci nie sú výborní.*

8. Výrok *Všetci sme omylní* je ekvivalentný s výrokom
a) *Niekto je neomylný.*
b) *Nikto nie je neomylný.*
c) *Niekto je omylný.*
d) *Nikto nepozná pravdu.*

9. Výrok *Nie je pravda, že ku každej hre existuje víťazný algoritmus* je ekvivalentný s výrokom
a) *Sú hry bez pravidiel.*
b) *Každá hra má víťazný algoritmus.*
c) *Niektorá hra má víťazný algoritmus.*
d) *Existuje hra, ku ktorej neexistuje víťazný algoritmus.*

10. Z tvrdenia *Nie je pravda, že som sa na brigáde zúčastnil najviac trikrát* vyplýva,
že sa na brigáde
a) *zúčastnil aspoň štyrikrát;*
b) *zúčastnil aspoň trikrát;*
c) *zúčastnil vždy;*
d) *nezúčastnil nikdy;*

11. Nech $\boldsymbol{A, B}$ sú pravdivé a $\boldsymbol{C}$ nepravdivý výrok. Z dole uvedených je pravdivý výrok
a) $\boldsymbol{(A \vee B) \wedge C}$ b) $\boldsymbol{(A \vee B) \Rightarrow C}$ c) $\boldsymbol{A \Rightarrow (B \wedge C)}$ d) $\boldsymbol{(A \wedge C) \Rightarrow B}$

12. Nech $\boldsymbol{A, C}$ sú pravdivé a $\boldsymbol{B}$ nepravdivý výrok. Z dole uvedených je nepravdivý výrok
a) $\boldsymbol{(A \wedge B) \Rightarrow C}$ b) $\boldsymbol{(A \wedge C) \Rightarrow B}$ c) $\boldsymbol{A \Rightarrow (B \vee C)}$ d) $\boldsymbol{B \Rightarrow (A \wedge C)}$

13. Negáciou výroku *Ak je dnes utorok, tak sme v Belgicku* je výrok
a) *Ak je dnes utorok, tak nie sme v Belgicku.*
b) *Nie je utorok a nie sme v Belgicku.*
c) *Dnes je utorok a nie sme v Belgicku.*
d) *Ak nie sme v Belgicku, tak nie je utorok.*

14. Negáciou výroku *Existuje číslo, ktoré je väčšie ako 5 alebo menšie ako 5* je výrok:
a) *Všetky čísla sú väčšie ako 5.*
b) *Existuje číslo, ktoré je rovné 5.*
c) *Všetky čísla sú rovné 5.*
d) *Neexistuje také číslo.*

15. Čo sa stalo, keď sa výrok *Ak niektorí prváci išli do kina, tak všetci druháci odišli do cirkusu*, ukázal nepravdivý?
a) *Niektorí prváci išli do kina a niektorí druháci neodišli do cirkusu.*
b) *Všetci prváci išli do kina a všetci druháci neodišli do cirkusu.*
c) *Niektorí prváci išli do kina a niektorí druháci odišli do cirkusu.*
d) *Ak niektorí prváci nešli do kina, tak niektorí druháci odišli do cirkusu.*

16. Ktorý z doleuvedených zložených výrokov je tautológia?
a) $(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{A}') \Rightarrow (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B}')$ b) $(\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}') \Rightarrow (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}')$
c) $(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \Rightarrow (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})'$ d) $(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{A}' \vee \boldsymbol{B})$

17. Ktorý z doleuvedených zložených výrokov nie je tautológia?
a) $[(\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B}'] \Rightarrow \boldsymbol{A}'$ b) $(\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}') \Rightarrow (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}')$
c) $[(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{A}' \Rightarrow \boldsymbol{B})] \Rightarrow (\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B})$ d) $(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{A}' \vee \boldsymbol{B})$

18. Rozhodnite, ktorý z doleuvedených úsudkov (sylogizmov) je správny?
a) *Žiadne A nie je C*
Všetky C sú B
Žiadne B nie je A

b) *Každé A je B*
Niektoré B je C
Žiadne C nie je A.

c) *Všetky C sú A*
Niektoré B sú C
Niektoré C nie sú B

d) *Všetky A sú C*
Niektoré A nie sú B
Niektoré C nie sú B

19. Rozhodnite, ktorý z doleuvedených úsudkov (sylogizmov) je nesprávny?
a) *Žiadne B nie je A*
Niektoré B je C
Niektoré C nie je A

b) *Všetky C sú A*
   Niektoré B sú C
   Niektoré C nie sú B

c) *Žiadne A nie je B*
   Každé C je B
   Žiadne C nie je A

d) *Všetky A sú C*
   Niektoré A nie sú B
   Niektoré C nie sú B

20. Z doleuvedených výrokov je pravdivý
a) Každý trojuholník má súčet veľkostí ťažníc väčší než súčet veľkostí svojich strán,
b) Ak je 18 deliteľné tromi a štyrmi, tak 18 je deliteľné šiestimi.
c) Žiadne prvočíslo nie je párne číslo.
d) Ani jeden koreň rovnice $(x + 1)\cdot(x - 6) = 0$ nie je kladné číslo.

21. Z doleuvedených výrokov nie je pravdivý
a) Nerovnici $x^2 - 20x + 120 < 0$ nevyhovuje žiadne reálne číslo.
b) Niektoré násobky čísla 7 sú násobkami čísla 5.
c) Pre každé celé číslo platí; $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$.
d) Všetky celočíselné násobky čísla 8 sú párne čísla.

22. Nech sú x, y celé čísla. Platnosť $x\cdot y > 4$ je pre platnosť $(x > 2 \wedge y > 2)$ podmienka
a) postačujúca
b) nevyhnutná a postačujúca
c) nedá sa určiť
d) nevyhnutná

Vyhodnotenie

Už staroveký Aristoteles (384 – 322 pred n. l.) vedel: *Najpozoruhodnejšie na človeku je jeho schopnosť myslieť*. Posúďte výsledky svojho logického myslenia aj podľa úspešnosti v tomto teste.

22 b – 18 b: *Rozum má cenu, iba ak slúži láske* (A. de Saint–Exupéry).

17 b – 13 b: *Je lepšie učiť ľudí ako majú myslieť a nie čo majú myslieť. Tým sa vyhneme mnohým nedorozumeniam* (G. Ch. Lichtenberg).

12 b – 8 b: *Každý sa sťažuje na zlú pamäť, ale nikto sa nesťažuje na zlý úsudok* (F. Rochefoucauld).

7 b – 3 b: *Bez učenia ani svätec nedokáže vynášať správne úsudky* (T. Campanella).

3 b – 0 b: *Z Descartovho výroku **Myslím, teda som**, nevyplýva, že **Som, teda myslím*** (E. Calda).

Možno práve teraz bude vhodná myšlienka známeho francúzskeho filozofa a matematika: *Celá ľudská dôstojnosť spočíva v myslení. Snažme sa preto, aby sme mysleli správne; v tom je princíp mravnosti* (B. Pascal; 1623–1662).

Správne odpovede:

1. **d** ; 2. **b** ; 3. **a** ; 4. **c** ; 5. **c** ; 6. **d** ; 7. **a** ; 8. **b** ; 9. **d** ; 10. **a** ; 11. **d** ;
12. **b** ; 13. **c** ; 14. **c** ; 15. **a** ; 16. **d** ; 17. **b** ; 18. **d** ; 19. **b** ; 20. **b** ; 21. **c** ; 22. **d**

(vybral a zostavil *Dušan Jedinák*)

Traja majstri logiky chceli zistiť, kto z nich je najmúdrejší. Pozvali teda veľmajstra, ktorý ich zaviedol do miestnosti (bez zrkadiel), zaviazal im oči a povedal: *Každému z vás namaľujem na čelo červenú alebo modrú bodku a odviažem šatky z očí. Každý sa pozrie na druhých dvoch a keď uvidí aspoň jednu červenú bodku, zdvihne ruku. Kto prvý uhádne, akú bodku má na čele, vyhrá.* Potom každému z nich namaľoval na čelo červenú bodku. A keď im odviazal šatky, všetci zdvihli ruku a po chvíli úmorného premýšľania jeden z nich povedal: *Mám na čele červenú bodku.* **Ako na to prišiel?**

Ten najmúdrejší musel uvažovať takto (aj ostatní tak mohli uvažovať, ale asi neboli tak bystrí):
Vidím všetky ruky hore a 2 červené bodky, ja teda môžem mať aj modrú aj červenú bodku.
Ak by som mal modrú, videli by obaja ostatní majstri všetky ruky hore a 1 červenú a 1 modrú bodku. Ich úvaha (každého zvlášť) by musela byť takáto: Ak ten, na ktorom vidím červenú bodku, vidí tú istú modrú bodku ako ja a má zdvihnutú ruku, potom na mne musí vidieť červenú bodku. Lenže na to, že sme všetci majstri logiky je táto úvaha veľmi jednoduchá, a moji protihráči stále nevedia, že majú na čelách červenú bodku. Takže ja nemám na čele modrú bodku, ale červenú.

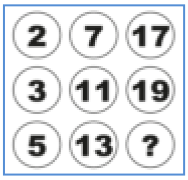
Veľmajster ukázal trom logikom 5 klobúkov, dva biele a tri čierne. Potom im povedal: *Zhasnem a každému z vás posadím na hlavu jeden klobúk, ostatné schovám, a potom rozsvietim. Všetci máte rovnakú šancu na výhru, každý z vás uvidí klobúky svojich súperov, ale svoj nie. Kto prvý uhádne, aký má klobúk, vyhrá.* Než ale stačil zhasnúť, už jeden z adeptov uhádol, aký bude mať na hlave klobúk. Aký to mal byť klobúk a **ako na to prišiel?**

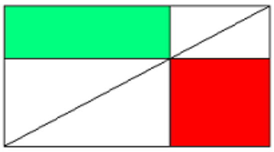
V tejto hádanke je dôležité, že všetci **mali rovnakú šancu** na výhru. Ak by niekto dostal čierny klobúk a ostatní biele, ten s čiernym klobúkom by ihneď vedel svoju farbu (na rozdiel od ostatných dvoch). 1 čierny a 2 biele klobúky teda nie je spravodlivé rozdelenie. Ak by veľmajster rozdal jeden biely a dva čierne klobúky, zvýhodnil by tých s čiernym klobúkom. Tí by totiž videli biely a čierny klobúk a očakávali by, že ak majú na hlave biely klobúk, potom ten s čiernym klobúkom musí okamžite zareagovať ako v predchádzajúcom prípade. Ak však nereaguje, obidvaja s čiernymi klobúkmi by zistili, že majú na hlave čierne klobúky, zatiaľ čo ten s bielym klobúkom stále rozmýšľa a nemôže na nič prísť. Teda ani toto nie je spravodlivý variant.
Preto musel veľmajster dať všetkým klobúky rovnakej farby, a teda čierne.

Traja belosi boli zajatí nepriateľským kmeňom indiánov. Náčelník tohto kmeňa im však dal šancu na prežitie. Zaviedol ich do vigvamu, kam nemalo prístup svetlo. Každému dal vybrať jednu čelenku (na výber mali 3 biele a 2 červené). Vo vigvame ich zoradil do zástupu a potom vyšli von. Každý videl čelenky tých pred sebou (napr. prvý nevidí žiadnu čelenku). Ak niekto z týchto 3 zajatcov dokáže povedať farbu svojej čelenky, zachráni tým aj ostatných. Po chvíli ticha jeden vyhlásil: *Moja čelenka je...* Akú farbu mala jeho čelenka? **A ako na to prišiel?**

Prvý mohol uvažovať takto:
„Posledný mlčí, to znamená, že nevie, to znamená, že aspoň jedna čelenka z tých, ktoré vidí je biela. Druhý tiež mlčí, ale vie už to, čo som pred chvíľou uviedol. Keby som mal červenú čelenku, tak vie, že jeho je biela. Ale on mlčí. Takže moja čelenka nie je červená. Moja čelenka je biela.“

Rovnako ako v žiari Slnka blednú všetky hviezdy,
tak aj učenec môže v spoločnosti zatieniť slávu iných,
keď predloží – ale aj keď vyrieši – matematické problémy.
(indický matematik Brahmagupta, asi v roku 628)





Stanovte a zdôvodnite, ktorý z vyfarbených štvoruholníkov v danom obdĺžniku má väčší obsah.

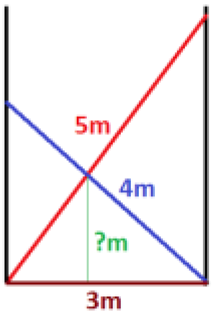
Stanovte, ktoré číslo (z tabuľky na obrázku) si myslím, ak o ňom z výrokov ***A***: *je v prvom riadku*; ***B***: *nie je v druhom stĺpci*; ***C***: *je párne*; **D**: *je väčšie ako 3*; je pravdivý iba jeden.

1	2	3
9	5	6
7	4	8

Osol a mulica niesli rôzny počet rovnako ťažkých vriec. Mulica hovorí*:* *Keby si mi dal jedno vrece, niesla by som dvakrát toľko ako ty*. Osol jej na to odpovedal: *Keby som ti jedno vrece zobral, niesli by sme obaja rovnako*. Stanovte koľko vriec niesol osol a koľko mulica.

Vo vrecku je presne 30 guliek. Ak náhodne vyberieme 12 guliek, vždy bude medzi nimi aspoň jedna biela. Ak náhodne vyberieme 20 guliek, vždy bude medzi nimi aspoň jedna, ktorá nie je biela. Stanovte, presný počet bielych guliek vo vrecku.

Stanovte trojicu najmenších po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorých súčet je druhou a zároveň aj treťou mocninou nejakých prirodzených čísel.



Do "dvojrozmernej studne" s vodorovným dnom a zvislými stenami vzdialenými od seba 3 metre sme hodili dve rovné palice dĺžok 4 a 5 metrov, ktoré sa ustálili v pozícii zaznačenej na obrázku. Stanovte ako vysoko od dna leží bod, v ktorom sa tieto palice "pretínajú".

Stanovte, koľko rôznych priebehov (sled gólov pre obe družstvá) mohol mať hokejový zápas, v ktorom bol po prvej tretine stav 2:1, po druhej tretine 3:3 a skončil výsledkom 4:5.

V roku 2007 súčet prvého dvojčíslia a posledného dvojčíslia roku môjho narodenia vyjadril môj vek. Stanovte, v ktorom roku 20. storočia som sa narodil.

Ťažko možno nájsť inú činnosť, ktorá by svojimi, niekoľkými tisíckami rokov preverenými skúsenosťami, mohla byť účinnejšou pre rozvíjanie myslenia, abstrakcie, predstavivosti a schopností riešiť problémy, ako je pestovanie matematiky.
(český matematik Petr Vopěnka; 1935 – 2015)

Podnety pre rozvoj matematických schopností

(aj pre žiakov ZŠ)

Ponúkam trochu netradičné využitie základných matematických vedomostí (v nečakanej situácii, na dôkaz nemožnosti, pre uvedomenie si zvláštnosti, v komplexnosti matematických úvah). Zdá sa mi, že príklady, ktoré tu predkladám, môžu byť podnetné a primerané aj vo vyšších ročníkoch základnej školy a v prvých ročníkoch stredných škôl. Každá z nich prináša pomerne krátky, ale myšlienkovo sústredený postup. Posúďte sami.

Úloha 1 (Neuveriteľný rébus)

Doplňte za každú • jednociferné prvočíslo, aby bolo znázornené násobenie správne:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & \times & & & \bullet & \bullet \\ \cline{2-6}
 & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

Riešenie: Jednociferné prvočísla sú iba: 2, 3, 5, 7. Pretože súčiny 2×2, 2×3, 2×5, 2×7 nemajú na konci prvočíslo, môže byť poslednou cifrou oboch čísel iba 3, 5 alebo 7. Teda dvojice 3, 5; 5, 3; 5, 5; 5, 7; 7, 5. Skúšame ......
Jediné riešenie je :

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 7 & 7 & 5 \\
 & \times & & & 3 & 3 \\ \hline
 & & 2 & 3 & 2 & 5 \\
 & 2 & 3 & 2 & 5 & \\ \hline
 & 2 & 5 & 5 & 7 & 5
\end{array}$$

Úloha 2 (Nemôže byť?)

Dokážte, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel nemôže byť druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Riešenie: *Nemôže byť?* To je otázka!
Súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísiel znamená:
$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = 4n^2 + 12n + 14 = 4\cdot(n^2 + 3n +3) + 2$, kde $n\in N$.
Pozrime sa „čo robia“ druhé mocniny prirodzených čísiel:
$1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, … Ak je n párne, t.j. $n = 2k$, tak $n^2 = 4k^2$, teda každá druhá mocnina párneho čísla je deliteľná štyrmi.
Druhé mocniny nepárnych čísiel sú vždy nepárne $[(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1= 4(k^2 +k) + 1]$.
Náš hľadaný súčet je párny, teda príslušné $p\in N$ je tiež párne a to ale znamená, že má byť aj deliteľné štyrmi. Ale náš súčet $4\cdot(n^2 + 3n + 3) + 2$ nie je deliteľný štyrmi.
Čiže také $p\in N$, aby pre $n\in N$ platilo $4\cdot(n^2 + 3n + 3) + 2 = p^2$ neexistuje. Dokázali sme, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísiel nemôže byť druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Úloha 3 (Labutia pieseň)

Rozložte číslo 2 na súčet štyroch rôznych zlomkov tvaru $\frac{1}{n}$, kde $n\in N$.

Riešenie: Je potrebné vyriešiť rovnicu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t} = 2$, aby x, y, z, t boli rôzne prirodzené čísla. Pretože zlomky majú byť rôzne, musí pre aspoň jeden z nich,

napr. $\frac{1}{x}$, platiť $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 2$, t.j. $2 > x > \frac{1}{2}$.

Teda pre $x \in N$ z toho vyplýva, že $x = 1$.

Potom $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1$ a tiež $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < 1$ t.j. $3 > y > 1$,

teda pre $y \in N$ je $y = 2$. Tým potrebujeme, aby $\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$;

znovu bude potrebné aby platilo, napr.

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{z} < \frac{1}{2} \quad \text{t.j.} \quad 4 > z > 2 \text{ v } N, \text{ z toho vyplýva, že } z = 3.$$

Potom už vyhovuje iba $t = 6$.

Platí : $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2+1}{6} = 2$

Úloha 4 (Možnosti pre milión)

Stanovte počet usporiadaných trojíc prirodzených čísiel x, y, z vyhovujúcich vzťahu $\boldsymbol{x \cdot y \cdot z = 10^6}$.

Riešenie: 10^6 môžeme rozložiť na súčin prvočísiel: $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$.

Hľadaný rozklad $x \cdot y \cdot z = 10^6$ môžeme „vidieť" takto:

$(2^a \cdot 5^p) \cdot (2^b \cdot 5^q) \cdot (2^c \cdot 5^r) = 2^6 \cdot 5^6$ t.j. $x = 2^a \cdot 5^p$, $y = 2^b \cdot 5^q$, $z = 2^c \cdot 5^r$ tak,

aby $a + b + c = 6$ a tiež $p + q + r = 6$, kde a, b, c, p, q, r sú nezáporné celé čísla.

Koľko je možností pre $a + b + c = 6$, ak $a, b, c \in \{0, 1 \ldots 6\}$?

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{1} \end{matrix} \qquad \text{spolu } \mathbf{28}$$

Ak si to systematicky rozpíšeme, dostávame 28 možností.

To isté dostaneme aj kombinatoricky pri predstave:

$1\ 1\ 1 \triangle 1\ 1 \triangle 1$, potom to bude $C_2(8) = P'_{2,6}(8) = 28$.

Taký istý počet možností je aj pre $p + q + r = 6$. Pretože ku každej trojici $[a, b, c]$ existuje iný výber $[p, q, r]$, je počet všetkých možností pre x, y, z daný $28 \cdot 28 = 784$.

Odporúčaná literatúra:

BURJAN, V. a kol.: *Matematický koktail*. Bratislava: SPN, 1991.

KONFOROVIČ, A.G.: *Významné matematické úlohy*. Praha: SPN, 1989.

KORDEMSKIJ, B.A.: *Hry, hlavolamy, triky*. Bratislava: Obzor, 1967.

KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN, 1990.

KUŘINA, F.-PŮLPÁN, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia, 2006.

PEREĽMAN, J.I.: *Zajímavá algebra*. Praha: SNTL, 1985.

THIELE, R.: *Matematické důkazy*. Praha: SNTL, 1985.

ZHOUF, J. a kol.: *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů.* Praha: Prometheus, 2006.

ZHOUF, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky*. Praha: Prometheus, 1997.

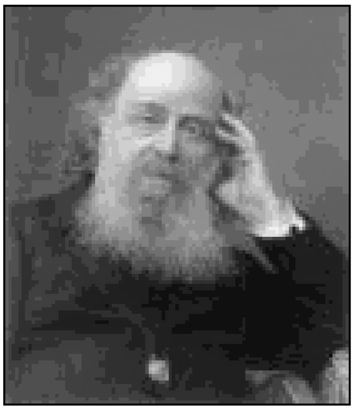
Sylvester ponúkol úlohu

Zadanie: *Z dostatočne veľkého počtu poštových známok s hodnotami 5 a 17 sa dajú skladať rôzne hodnoty. Aká je* ***najväčšia*** *hodnota, ktorá* ***sa nedá*** *vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt?*

Riešenie: Generujme systematickú tabuľku hodnôt, ktoré dostávame postupným sčítavaním jednotlivých hodnôt:

	5	10	15	20	25	...
17	22	27	32	37	42	...
34	39	44	49	54	59	...
51	56	61	66	71	76	...
68	73	78	83	88	93	...

Vidíme, že vieme vytvoriť číselné hodnoty
na konci s číslicou 0 pre čísla $\geq$ 10;
na konci s číslicou 5 pre čísla $\geq$ 5;
na konci s číslicou 7 pre čísla $\geq$ 17;
na konci s číslicou 2 pre čísla $\geq$ 22;
na konci s číslicou 4 pre čísla $\geq$ 34;
na konci s číslicou 9 pre čísla $\geq$ 39;
na konci s číslicou 1 pre čísla $\geq$ 51;
na konci s číslicou 6 pre čísla $\geq$ 56;
na konci s číslicou 8 pre čísla $\geq$ 68;
na konci s číslicou 3 pre čísla $\geq$ 73;
teda najväčšou hodnotou, ktorá sa nedá z daných hodnôt vytvoriť je **63**.



Osudy žitia

V londýnskej židovskej rodine sa 3. 9. 1814 narodil James Joseph **Sylvester**. Po vychodení základnej školy navštevoval strednú školu v Liverpoole. V rokoch 1831 - 1837 študoval na St. John´s College v Cambridgi. Potom učil fyziku na univerzite v Londýne. *Objekt čistej fyziky je sledovanie zákonov sveta, objekt čistej matematiky je sledovanie ľudskej inteligencie*. V roku 1841 pôsobil polrok na univerzite vo Virginii (USA). Po návrate do Anglicka študoval právo a pracoval ako matematický štatistik v poisťovacej spoločnosti. Na súdnom dvore v Londýne sa zoznámil s A. Cayleym (1821 - 1895) a spolupracovali na rozvoji teórie matíc. Do profesionálnej matematiky sa **Sylvester** vrátil ako profesor na Kráľovskej vojenskej akadémii vo Woolwichi (1854 - 1870). V rokoch 1877 - 1883 pôsobil na univerzite J. Hopkinsa v Baltimore (USA). Keď sa vrátil z Ameriky učil v Oxforde na katedre geometrie. Bol úspešným tvorcom matematických termínov (napr. invariant, kovariant a pod.), zaviedol pojem matice, využíval teóriu matíc na štúdium viacrozmernej geometrie, študoval kanonické tvary kvadratických foriem. Prispel k rozvoju modernej matematiky v Amerike (r. 1878 založil prvý americký matematický časopis). V roku 1892 sa vrátil (s poruchami zraku i pamäti) do Londýna, kde 15. 3. 1897 zomrel.

(dmj)

Votrelec

Úloha: Preskúmajte rozličné vlastnosti čísiel v jednotlivých radoch a vyraďte z každého nasledujúceho radu čísiel vždy jedno, ktoré nezodpovedá „logike" ostatných čísiel v príslušnom rade – svoj názor zdôvodnite:

a/ 12, 34, 58, 78
b/ 46, 84, 73, 91
c/ 134, 245, 467, 754, 689
d/ 1764, 4761, 6174, 6832, 7641

Riešenie:

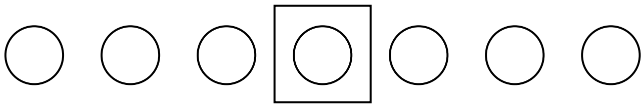
a/ 58; ostatné sú dvojciferné čísla s postupne rastúcimi číslicami.
b/ 84; ostatné čísla majú súčet číslic rovnaký (10).
c/ 754; ostatné čísla sú zostavené z pravidelne narastajúcich číslic.
d/ 6832; ostatné čísla sú zostavené vždy z tých istých číslic {1,4,6,7}.

Šikovní hubári

Úloha: Sedem hubárov nazbieralo spolu 100 húb tak, že každý z nich nazbieral iný počet. Dokážte, že medzi nimi sú traja takí, ktorí dohromady nazbierali aspoň 50 húb.

Riešenie:

Usporiadajme počty nájdených húb vzostupne



najmenej najviac

Priemerný počet nazbieraných húb je medzi počtom 14 – 15.

Ak je "prostredný" počet (označený štvorčekom) aspoň 15, tak potom od stredu napravo sú počty najmenej 16, 17, 18, to znamená spolu 51 a tým je dokázané tvrdenie našej úlohy.

Ak je "v strede" počet najviac 14, tak naľavo od stredu sú najviac počty 11, 12, 13, teda spolu so stredným počtom najviac 50, ale to znamená, že od stredu doprava bude súčet tých zvyšných troch aspoň 50 a to je tvrdenie našej úlohy.

Aspoň a práve

Úloha: Vo vrecku je 30 guliek. Ak náhodne vyberieme 12 guliek, vždy bude medzi nimi aspoň jedna biela. Ak náhodne vyberieme 20 guliek, vždy bude medzi nimi aspoň jedna, ktorá nie je biela. Koľko bielych guliek je vo vrecku?

Riešenie:

Ak náhodne vyberieme 12 guliek a vždy bude medzi nimi *aspoň jedna* biela, to znamená, že vo vrecku je *aspoň* 19 bielych guliek.
Ak náhodne vyberieme 20 guliek a vždy bude medzi nimi *aspoň jedna*, ktorá nie je biela, to znamená, že vo vrecku je *aspoň* 11 guliek, ktoré nie sú biele.
Pretože vo vrecku je *práve* 30 guliek (19 + 11 = 30), znamená to, že *práve* 19 guliek je bielych a *práve* 11 guliek nemá bielu farbu. Vo vrecku bolo 19 bielych guliek.

Cifry, cifry, cifričky...

Existujú celkom zaujímavé matematické úlohy už pre základné školy s využitím číslic (cifier) hľadaných alebo daných čísiel a ich vlastností. Uvádzam šesť zadaní a ich riešení s rôznym stupňom náročnosti.

Počet cifier

Úloha 1: Stanovte počet cifier čísla $(4^5 \cdot 5^{13})$.

Riešenie:
$4^5 \cdot 5^{13} = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 5^{10} \cdot 5^3 = 5^3 \cdot 10^{10} = 125 \cdot 10^{10}$, teda skúmané číslo má **13 cifier**.

Najmenšie s daným ciferným súčtom

Úloha 2: Stanovte najmenšie prirodzené číslo, ktorého ciferný súčet je 2008.

Riešenie:
Ak má byť prirodzené číslo s daným ciferným súčtom čo najmenšie, musí mať aj čo najnižší rád, t.j. počet nenulových cifier, teda čo najviac číslic 9. Pretože 2008 : 9 = 223 + 1/9, hľadané číslo je **199.........9** (jednotka a za ňou 223 ráz číslica 9).

Podmienky na ciferný súčet i ciferný súčin

Úloha 3: Stanovte najväčšie trojciferné číslo, ktorého ciferný súčet je prvočíslo a ciferný súčin sa rovná tretej mocnine prirodzeného čísla.

Riešenie:
Označme hľadané trojciferné číslo v tvare $\underline{x\,y\,z}$ t.j. $x \cdot 100 + y \cdot 10 + z$, kde $x \geq y \geq z$,

lebo chceme čo najväčšie. Pre súčin cifier má platiť $x \cdot y \cdot z = m^3$, $m \in N$.

Skúsme $x = 9 = 3^2$ (chceme najväčšie), potom $y{\cdot}z = 3{\cdot}1^3 \cup 3{\cdot}2^3$, lebo potrebujeme exponent 3.

Potom pre $y = 3$, $z = 1$ je ciferný súčet $9 + 3 + 1 = 13$;

pre $y = 8 = 2^3$, $z = 3$ je ciferný súčet $9 + 8 + 3 = 20$ (nie je prvočíslo);

pre $y = 6 = 2{\cdot}3$, $z = 4 = 2^2$ je ciferný súčet $9 + 6 + 4 = 19$. Úlohe vyhovuje číslo **964**.

Hľadanie poslednej číslice

Úloha 4: Dokážte, že číslo $(123^{123} – 57^{57})$ je deliteľné číslom 10.

Riešenie:
Hneď nás napadne: stačí ukázať, že posledná cifra rozdielu musí byť nula, teda 123^{123} aj 57^{57} musia mať poslednú cifru rovnakú. Určíme posledné cifry daných čísel.

Posledná cifra čísla 123^{123} je posledná cifra čísla $3^{123} = 3^{120} \cdot 3^3 = (3^4)^{30} \cdot 27 = (81)^{30} \cdot 27$.

To znamená, že posledná cifra je 7. Posledná cifra 57^{57} je posledná cifra čísla $7^{57} = 7^{4\cdot14+1} = (7^4)^{14} \cdot 7 = (2401)^{14} \cdot 7$, teda posledná cifra je 7. Ukázali sme, že rozdiel $123^{123} - 57^{57}$ má poslednú cifru $7 - 7 = 0$; skúmané číslo je **deliteľné číslom 10**.

Súčet niektorých cifier

Úloha 5: Stanovte všetky štvorciferné prirodzené čísla deliteľné siedmimi,
pre ktoré zároveň platí: súčet ich prvých dvoch cifier je 10; súčet ich druhých dvoch cifier je tiež 10; súčet ich posledných dvoch cifier je 9.

Riešenie:
Ak si označíme jednotlivé cifry písmenami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ (teda číslo $\underline{\boldsymbol{abcd}}$), tak by o nich malo platiť:

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 10 \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 10 \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = 9$, to znamená, že $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} = 10 - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d} = 9 - \boldsymbol{a}$.

Po vyplnení tabuľky pre $\boldsymbol{a} \in \{1, 2, ... 9\}$ dostaneme:

a	*b*	*c*	*d*
1	**9**	**1**	**8**
2	8	2	7
3	7	3	6
4	6	4	5
5	5	5	4
6	4	6	3
7	3	7	2
8	**2**	**8**	**1**
9	1	9	0

Z nich vyberieme tie, ktoré sú deliteľné siedmimi: **1918** a tiež **8281**.

Dvadsať cifier

Úloha 6: Nech $\boldsymbol{p}$ je ľubovoľné prvočíslo väčšie ako 3. Dokážte, že ak číslo $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}$ má práve 20 cifier, potom niektoré tri z nich sú rovnaké.

Riešenie:

Predpokladajme, že číslo $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}$ ($\boldsymbol{p}$ je prvočíslo väčšie ako 3) má práve 20 cifier a žiadne tri z nich nie sú rovnaké. Ak nie sú žiadne tri cifry čísla $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}$ rovnaké, tak dvadsaťciferné číslo $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}$ obsahuje každú z cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 práve dvakrát. Teda ciferný súčet čísla $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}$ je $2 \cdot (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 90$. Z toho vyplýva, že $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}$ je deliteľné 3. Ale to je spor, pretože číslo $\boldsymbol{p}$ je prvočíslo väčšie ako 3 a teda nie je deliteľné tromi. Teda ani $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}$ nie je deliteľné tromi. Preto, ak $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}$ má práve 20 cifier ($\boldsymbol{p}$ je prvočíslo väčšie ako 3), tak niektoré tri z týchto dvadsiatich cifier čísla $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{n}}$ musia byť rovnaké.

Ďalšie podobné zaujímavé úlohy sú aj v knižkách:

CIRJAK, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh*. Prešov: Essox, 2000.
HECHT, T. – SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*. Bratislava: SPN, 1992.
MIHALÍKOVÁ, B. a kol.: *Úlohy matematickej olympiády ZŠ*. Bratislava: IUVENTA, 2003.
ODVÁRKO, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh*. Praha: SPN, 1990.
REPÁŠ, V. a kol.: *Úlohy z matematických olympiád základnej školy*. Bratislava: SPN, 1989.
ZHOUF, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky*. Praha: Prometheus, 1997.

Bystrí študenti počtov a merby

Úloha:

Učiteľ matematiky si myslel dve prirodzené čísla väčšie než 1. Svojmu prvému študentovi povedal len ich **súčin** a druhému len ich **súčet**. Potom bolo počuť rozhovor medzi týmito dvomi študentmi:

Prvý: *Nepoznám ich jednoznačný súčet.*

Druhý: *To som vedel. Súčet je menší než 14.*

Prvý: *To som vedel. Ale teraz už hľadané čísla poznám.*

Druhý: *A ja už tiež.* Poznáte aj vy, ktoré čísla si učiteľ v tomto príbehu myslel?

Riešenie:

Súčet hľadaných dvoch čísiel je menší než 14 (pre prirodzené čísla väčšie než 1), teda možné sú nasledujúce kombinácie:

2 2 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
2 3 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
2 4 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
2 5 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
2 6
2 7 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
2 8
2 9
2 10
2 11 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
3 3 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
3 4
3 5 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
3 6
3 7 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
3 8 ... NIE – súčin nemá všetky možné súčty menšie než 14 (napr. 2 + 12)
3 9 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
3 10 ... NIE – súčin nemá všetky možné súčty menšie než 14
4 4
4 5
4 6 ... NIE – súčin nemá všetky možné súčty menšie než 14
4 7 ... NIE – súčin nemá všetky možné súčty menšie než 14
4 8 ... NIE – súčin nemá všetky možné súčty menšie než 14
4 9 ... NIE – súčin nemá všetky možné súčty menšie než 14
5 5 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
5 6 ... NIE – súčin nemá všetky možné súčty menšie než 14
5 7 ... NIE – prvý by poznal aj súčet
5 8 ... NIE – súčin nemá všetky možné súčty menšie než 14
6 6 ... NIE – súčin nemá všetky možné súčty menšie než 14
6 7 ... NIE – súčin nemá všetky možné súčty menšie než 14

Zostali teda nasledujúce kombinácie:

2 6 ... NIE – z daného súčtu nemožno vytvoriť žiadnu dvojicu číslic, z ktorých súčinu by existoval aspoň jeden súčet väčší než 14 (zo súčtu 8 nemožno vytvoriť dvojicu čísel, ktorých súčin by mal alternatívny súčet väčší než 14 ... napr. ak 4 a 4, potom z ich súčinu 16 neexistuje žiadny možný súčet – napr. z číslic 2 a 8 – väčší než 14)
2 8
2 9
2 10
3 4 ... NIE – z daného súčtu nemožno vytvoriť žiadnu dvojicu číslic, z ktorých súčinu by existoval aspoň jeden súčet väčší než 14

3 6 ... NIE – z daného súčtu nemožno vytvoriť žiadnu dvojicu číslic, z ktorých súčinu by existoval aspoň jeden súčet väčší než 14
4 4 ... NIE – z daného súčtu nemožno vytvoriť žiadnu dvojicu číslic, z ktorých súčinu by existoval aspoň jeden súčet väčší než 14
4 5 ... NIE – z daného súčtu nemožno vytvoriť žiadnu dvojicu číslic, z ktorých súčinu by existoval aspoň jeden súčet väčší než 14

Druhý študent (poznajúci súčet) vedel, že prvý študent (poznajúci súčin) nepozná súčet a myslel si, že nevie o tom, že súčet je menší než 14.

Zostávajú posledné 3 dvojice číslic:
2 8 ... súčin = 16, súčet = 10
2 9 ... súčin = 18, súčet = 11
2 10 ... súčin = 20, súčet = 12

Vylúčme súčty, ku ktorým možno dospieť aj s jedinečnou kombináciou čísel – ak je zo súčinu jasný súčet (to sa dalo urobiť už skôr, ale potom by to nebolo také napínavé) – pretože druhý študent vedel, že jeho súčet nie je tvorený takou dvojicou čísel. A teda súčet nemôže byť 10 (lebo 7 a 3) – druhý študent vedel, že prvý nepozná súčet – ale pri súčte 10 by prvý mohol vedieť súčet, ak by bola dvojica 7 a 3. To isté platí pre súčet 12 (lebo 5 a 7). Teda zostala len jedna možnosť:
Hľadané čísla sú 2 a 9.

Číselná logika

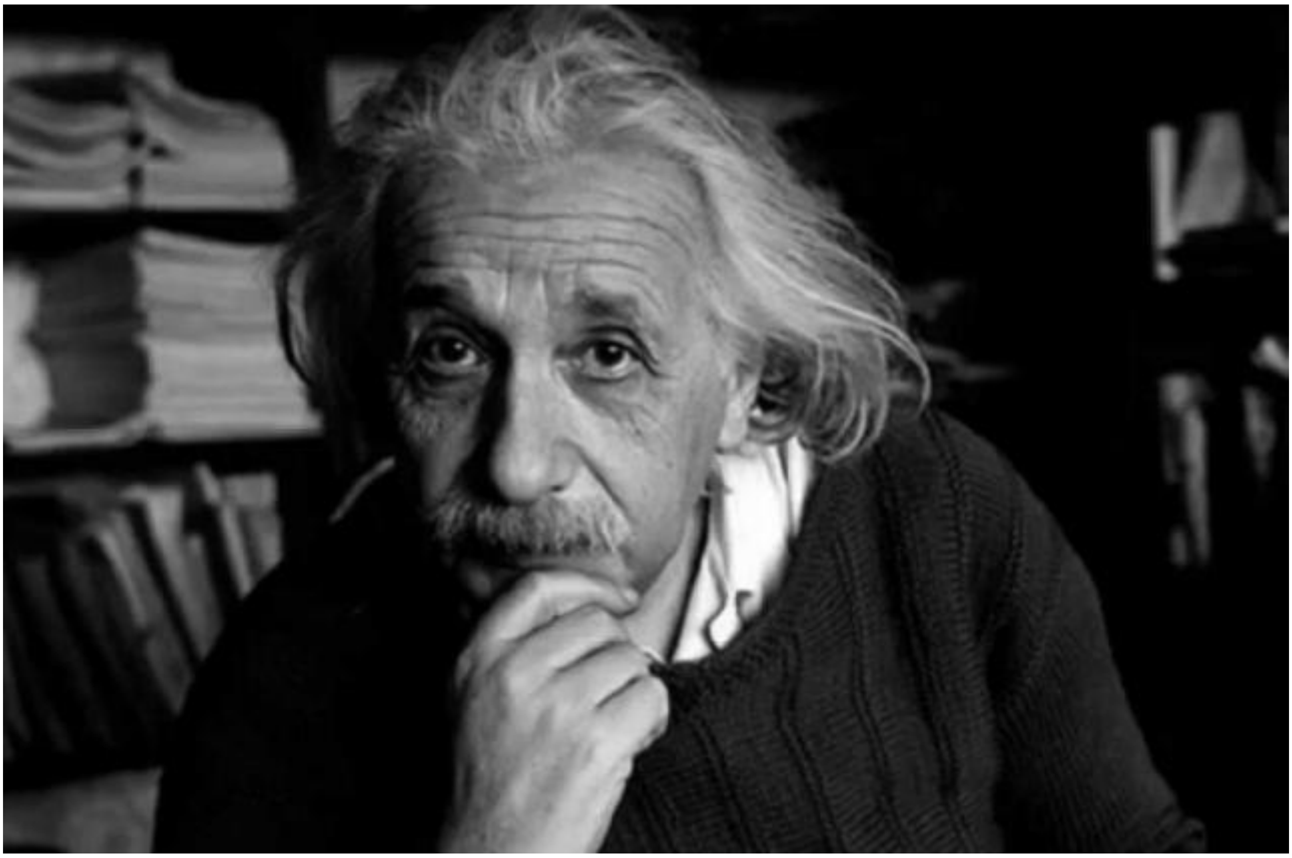
Úloha:
O danom prirodzenom čísle platia výroky (implikácie):
Ak nie je deliteľné štyrmi, tak je z intervalu <60; 69>.
Ak je deliteľné tromi, tak je z intervalu <50; 59>.
Ak nie je deliteľné šiestimi, tak je z intervalu <70; 79>.
Ktoré je to číslo?

Riešenie:
Nemôže sa stať, aby dané implikácie neplatili, teda aby platilo:
dané číslo nie je deliteľné štyrmi a nie je z intervalu <60; 69>,
alebo *dané číslo je deliteľné tromi a nie je z intervalu* <50; 59>,
alebo *dané číslo nie je deliteľné šiestimi a nie je z intervalu* <70; 79>.

Ak teda vylúčime tie prirodzené čísla, ktoré vyhovujú predchádzajúcim trom konjunkciám, zostaneme nám v intervale <50; 79> iba číslo 76.
Pre číslo 76 sú výroky (implikácie) zo zadania úlohy platné.

Bystrí chlapci v tmavom podchode

Úloha: Štyria chlapci – Adam, Boris, Cyril a Dušan, chcú prejsť cez tmavý podchod. Adamovi trvá cesta cez podchod minútu, Borisovi dve minúty, Cyrilovi štyri a Dušanovi päť minút. Podchod je tak úzky, že ním môžu prejsť naraz najviac dvaja chlapci. Majú k dispozícii jednu lampu, ktorá vydrží svietiť 12 minút. Je možné, aby všetci chlapci prešli cez tmavý podchod tak, aby nikto z nich nemusel prechádzať potme? (Ak prechádzajú podchodom dvaja chlapci spoločne, idú rýchlosťou pomalšieho z nich.)
Riešenie:
Ak na začiatku prejde cez podchod Adam s Borisom cesta im bude trvať dve minúty. Jeden z nich sa musí vrátiť. Ak sa vráti Boris, cesta späť mu opäť bude trvať dve minúty (spolu 4 min.).
Ak druhýkrát pôjdu cez podchod Cyril s Dušanom, cesta im bude trvať päť minút (spolu 9 min.), na konci podchodu vrátia lampu Adamovi, ktorý sa cez podchod vráti za minútu a spolu s Borisom ho opäť prejdú za dve minúty. To znamená, že všetci chlapci môžu prejsť na druhú stranu podchodu a cesta im bude trvať $2+2+5+1+2=12$ minút.

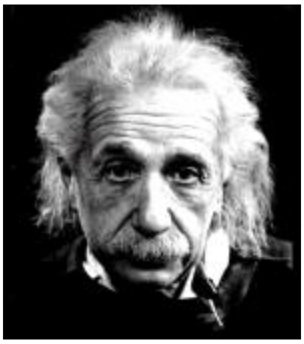


V zákonoch vesmíru sa odhaľuje duch,
duch nekonečne nadradený duchu ľudskému.
Ak sa mu ocitneme tvárou v tvár,
musíme – pri vedomí svojich skromných schopností,
pocítiť hlbokú pokoru...
V tomto zmysle vedie úsilie vedecké k zvláštnemu pocitu zbožnosti...
Boh sa odhaľuje v harmónii všetkého, čo je.

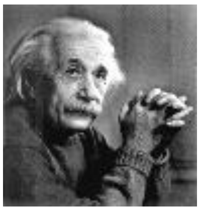
Albert EINSTEIN (14.3.1879 – 18.4.1955)

Z pohľadu Alberta Einsteina

(14. 3. 1879 - 18. 4. 1955)



- *Najkrajší zážitok, ktorý môžeme mať je pocit tajomstva, mystická skúsenosť. Jedine z toho sa rodí skutočná veda i pravé umenie. Kto je neprístupný tomuto vzrušeniu, kto nevie obdivovať a dať sa niesť úžasom, je akoby slepý, je duševne mŕtvy.* ***Vedomie tajomstva života nás desí, ale aj privádza k začiatkom náboženstva.*** *Poznanie, že to, čo sa nám zdá nepreniknuteľné, skutočne existuje a prejavuje sa ako najvyššia múdrosť a žiariaca krása, ktoré naše otupené schopnosti môžu zachytiť len v najprimitívnejších formách, toto vedomie a tušenie je jadrom pravej zbožnosti.*
- *Bez viery, že sa tento svet, tak ako sa javí nášmu poznaniu, riadi zákonmi rozumovej povahy, bez viery, že tento svet možno rozumom pochopiť, bez tejto viery si ani neviem predstaviť nijakého skutočného vedca...* ***Chcem poznať ako Boh stvoril tento svet.*** *Chcem poznať Jeho myšlienky...*
- *Poznanie, že Tajomstvo skutočne jestvuje a že sa zjavuje ako žiarivá krása, o ktorej ľudia majú iba nejasné tušenie, tvorí jadro každej skutočnej náboženskosti...* ***Prírodné vedy bez náboženstva sú ochrnuté a náboženstvo bez vedy je slepé...*** *Náboženstvo a veda sú podľa môjho názoru dve veľké a príbuzné sily, úzko medzi sebou spriahnuté. Viedli ľudstvo vpred a ešte vždy ho vedú.*
- *Moja vedecká činnosť nie je motivovaná ničím iným než neodolateľnou túžbou preniknúť do tajomstva prírody. Moja láska k poznávaniu a túžba prispieť k zlepšeniu životných podmienok človeka sú tak späté s mojimi vedeckými záujmami.*
- *Človek sa pokúša akosi primerane vytvoriť zjednodušený a prehľadný obraz sveta a tak prekonať svet zážitkov tým, že sa ho snaží nahradiť do istej miery týmto obrazom. To robí maliar, básnik, špekulatívny filozof i prírodovedec, každý svojím spôsobom. Do tohto obrazu a do jeho vytvárania kladie ťažisko svojho citového života, aby tak hľadal kľud a stálosť, ktoré nemôže nájsť v príliš úzkom kruhu rozvíreného a osobného zážitku.*
- *Aké je nádherné pocítiť jednotu celého komplexu javov, ktoré sa pri bezprostrednom chápaní zdajú nesúrodé... Najviac nepochopiteľné na prírode je to, že ju môžeme chápať...*



Naša veda je primitívna a detinská, ale je tým najdokonalejším, čo vôbec máme... V obdivuhodnom vesmíre sa prejavuje neohraničene vládnuci Rozum...
Môžeme pokorne obdivovať harmóniu stavby vesmíru, pokiaľ ju dokážeme pochopiť... Duchovné hodnoty sú a vždy boli spoločným cieľom celého ľudstva.

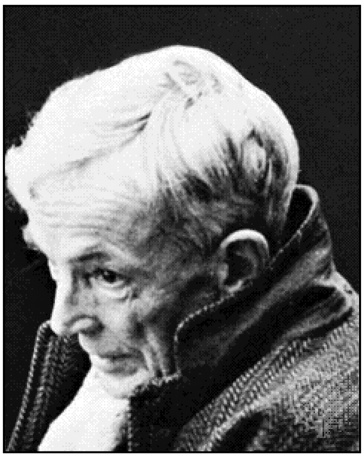
Len život, ktorý žijeme pre ostatných, stojí za to...

Radosť vedieť a porozumieť je najkrajší dar prírody...

- *Keď ide o pravdu a spravodlivosť, neexistuje nijaký rozdiel medzi malými a veľkými problémami. Najvšeobecnejšie hľadiská, ktoré sa dotýkajú ľudského konania, sú nedeliteľné. Kto to nemyslí vážne s pravdou v malých veciach, tomu nemožno dôverovať ani vo veľkých.*
- ***Hodnotenie človeka má vychádzať z toho, čo dáva, nie z toho, čo je schopný získať.***
- *Nech sú dobrí a spravodliví ľudia akokoľvek bezmocní, len kvôli nim stojí za to žiť.*
- *Nemusíš byť úspešným človekom. Snaž sa byť človekom, ktorý za niečo stojí.*
- *Skutočná hodnota nepochádza z ambícií alebo z jednoduchého zmyslu pre povinnosť, ale z lásky a oddanosti k ľuďom a objektívnym záležitostiam.*
- *Vieme, že sme tu pre druhých ľudí, predovšetkým pre tých, na ktorých úsmeve a blahu úplne závisí naše vlastné šťastie. Potom však aj pre mnoho nepoznaných, s ktorých osudom nás viaže puto spoločného cítenia.*
- *Iba príklad veľkých a silných osobností môže viesť k ušľachtilému chápaniu a činom.*
- ***Čo má každý človek robiť – byť príkladom čistoty a mať odvahu seriózne si uchovať mravné presvedčenie v spoločnosti cynikov.***

O duši matematickej

G. H. HARDY (1877 – 1947), anglický matematik



*Mohutnosť matematickej pravdy je zrejmá a impozantná...
Žiadny iný odbor nemá také vyhranené a jednoznačné pravidlá
a nezabudnuteľní objavitelia si takmer vždy zaslúžia úctu.*

*Matematika je zdrojom radosti pre značné množstvo ľudí...
Matematika rovnako ako poézia alebo hudba, môže prebúdzať
a udržiavať vznešené rozpoloženie ducha a prispievať tak ku šťastiu
matematikov aj iných ľudí.*

*Človek, ktorý by dokázal presvedčivo popísať matematickú
skutočnosť, by vyriešil veľmi mnoho najobťažnejších problémov
metafyziky.*

*Verím, že matematická skutočnosť leží mimo nás, že našou úlohou je objavovať či pozorovať ju
a že vety, ktoré dokazujeme a ktoré nafúknuto označujeme ako svoje výtvory, sú jednoducho našimi
záznamami našich pozorovaní.*

*Šachové úlohy sú hymnickými spevmi matematiky... šachista môže ako obeť ponúknuť sedliaka
alebo figúru, ale* ***matematik ponúka hru****.*

*Na svete nie je nič, čo by tak potešilo dokonca i slávnych mužov, ako objavenie
alebo znovuobjavenie pôvodnej matematickej vety.*

*Matematik je tvorcom myšlienkových vzorcov a ich krása a závažnosť sú kritériá,
podľa ktorých treba jeho vzorce posudzovať.*

*Matematika sa vyznačuje najdôkladnejšou a najúžasnejšou technikou
a ponúka čisto odborné, remeselné zručnosti.*

*Matematika je večná, pretože to najlepšie z nej stále hlboko citovo pôsobí na tisíce ľudí
po tisícich rokov podobne ako literatúra.*

Čistá matematika je ako skala, na ktorej stojí celý idealizmus.

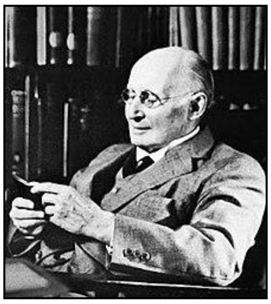
***Matematik by nemal zabúdať, že matematika, viac ako ktorékoľvek umenie
alebo veda, je záležitosť mladých... Ak má človek nejaký rýdzi talent, mal by
byť pripravený priniesť akúkoľvek obeť, aby ho úplne rozvinul.***

Matematické myšlienky nezomierajú.

***Keď svet šalie, môže matematik vo svojej vede nájsť nedostihnuteľne
utišujúci prostriedok.***

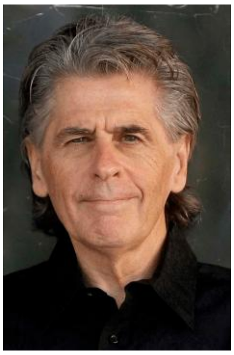
Človek niekedy musí hovoriť zložité veci, ale mal by ich hovoriť čo najjednoduchšie.

(G. H. Hardy: *Obrana matematikova*. Praha: Prostor, 1999)
(vybral a zostavil D. J.)



***Matematika** je myslenie pohybujúce sa vo sfére úplného abstrahovania od každého jednotlivého prípadu toho, o čom práve vypovedá... Najväčšie abstrakcie sú tými pravými nástrojmi, ktorými kontrolujeme svoje uvažovanie o konkrétnych faktoch...*
Originalita matematiky spočíva v tom, že v matematickej vede sú vyjadrené vzťahy medzi vecami, ktoré sa bez sprostredkovania ľudským rozumom nedajú vôbec postihnúť...
Matematika je štúdiom vzorov...
Matematika je veda o najzložitejších abstrakciách, k akým môže ľudský um dospieť.
Všeobecnosť matematiky je najúplnejšou všeobecnosťou, zhodnou so spoločenstvom udalostí, ktoré konštituuje našu metafyzickú situáciu.
(A.N. WHITEHEAD, 1861 – 1947).

***Matematika** je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobudneme cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu...*
*Matematika je vtedy zaujímavá, ak živí našu vynachádzavosť a **zdatnosť usudzovania**.* (G. POLYA, 1887 – 1985)



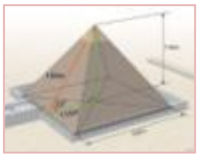
***Matematika** je najpresnejším nástrojom ľudského rozumu na popis abstraktných štruktúr...*
Matematikou sa skúmajú abstraktné numerické štruktúry, štruktúry tvarov a topologické vlastnosti, zákony pohybu a zmeny, princípy rozhodovacích procesov a komunikácie, vlastnosti symetrie a pravidelnosti, podstata pravdepodobnosti a pod.
Matematika je spôsobom myslenia a vnímania, ktorý nám umožňuje prenikať ku koreňom sveta okolo nás...
*Matematika žije a dýcha v mysliach ako akási **abstraktná symfónia**.*
(K. DEVLIN, ∗1947)

Matematika je jedným z odborov prinášajúcich najväčšie intelektuálne uspokojenie...
***Zaoberať sa matematikou** je skutočné potešenie spočívajúce **v nachádzaní spôsobov myslenia**, ktoré vysvetľujú, organizujú a zjednodušujú.*
(W. P. THURSTON, 1946 – 2012)

Samotný Boh nie je nekonečná samota, ale udalosť lásky...
*v ňom môžeme zbadať Ducha Stvoriteľa, samotného Boha ako **stvoriteľskú matematiku**, ako silu, ktorá vytvára zákony sveta a jeho systém...*
Benedikt XVI.

Dôležité letopočty – osobnosti a udalosti

5. tisícročie pred n. l. – chrám v Eridu, najstaršia sakrálna stavba
asi 3300 pred n. l. – Sumeri mali slabičné písmo ryté do tabuliek (asi 400 znakov)
asi 3200 pred n. l. – egyptské hieroglyfy - písmo
asi 3000 pred n. l. – v Mezopotámii, v Egypte vznikali mestské štáty
asi 2700 – 2400 pred n. l. – Džóserova pyramída v Sakhare (*Imhotep*)



- Cheopsova pyramída pri Gize 232,4 m x 232,4 m, výška 146,7 m)
- Chefrénova pyramída a sfinga (50 m, 20m)

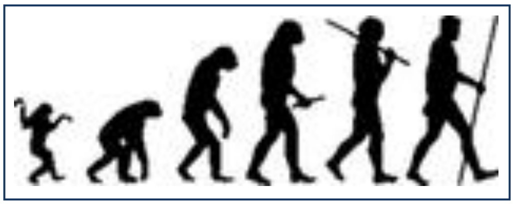
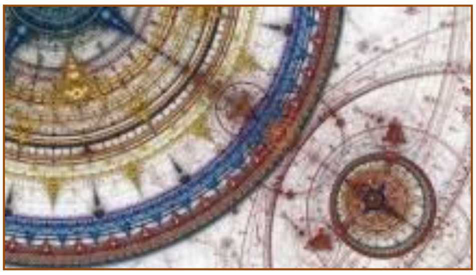
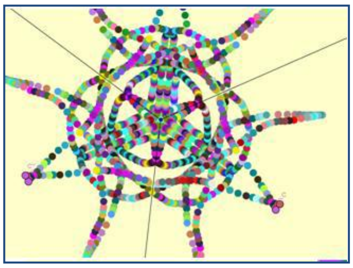
asi 2000 pred n. l. – paláce v Knósse (Kréta), Minósov labyrint
asi 1750 pred n. l. – starobabylónska ríša Chammurapiho, vydanie zákonníka
asi 1500 – 1200 pred n. l. – rozkvet mykénskej kultúry (Atény, Téby)

asi 1360 pred n. l. – *Tutanchámon*
asi 1220 pred n. l. – *Mojžiš* vyviedol Izraelitov z Egypta
okolo 1200 pred n. l. – trójska vojna (neskôr stvárnená Homérom)
asi 955 pred n. l. – *Šalamún* začal stavať chrám
814 pred n. l. – založenie Kartága
776 pred n. l. – prvé grécke olympijské hry v Olympii
753 pred n. l. – založenie Ríma
594 pred n. l. – Solónova ústava v Aténach
586 pred n. l. – pád Jeruzalema do babylónskeho zajatia
560 – 483 pred n. l. – *Budha*, indický náboženský reformátor
asi 530 pred n. l. – *Platón* má filozofickú školu – Akadémia v Aténach
336 – 323 pred n. l. – vláda Alexandra Veľkého
335 pred n. l. – *Aristoteles* má svoju školu – Lykeion
310 – 280 pred n. l. – *Euklides*: axiomatická výstavba matematiky (*Stoicheia –Základy*)

264 pred n. l. – začiatok púnskych vojen medzi Kartágom a Rímom
146 pred n. l. – nadvláda Ríma nad gréckymi štátmi
73 – 71 pred n. l. – povstanie otrokov pod vedením Spartaka
45 pred n. l. – zavedenie juliánskeho kalendára (*Sosigenes*, egyptský astronóm)
30 pred n. l. – pripojenie Egypta k Rímskej ríši
27 pred n. l. – začala vláda prvého rímskeho cisára Augusta

Začiatok nášho letopočtu

33 n. l. – bol ukrižovaný *Ježiš Kristus*, zakladateľ kresťanstva
60 – 130 – vznik kníh označených ako *Nový zákon*
179 – nápis na trenčianskej skale
313 – *Milánsky edikt* zrovnoprávnil kresťanstvo
391 – bola zničená slávna knižnica v Alexandrii
395 – rozdelenie rímskej ríše na západnú a východnú časť
476 – zánik západnej rímskej ríše
482 – oddelenie východnej cirkvi od rímskej
529 – *Justinián* uzavrel platónsku Akadémiu v Aténach;
– *Benedikt z Nursie* založil kláštor Monte Cassino
570 – 632 – *Mohamed*, arabský náboženský mysliteľ, založil islam
800 – *Karol Veľký* sa stal cisárom franskej ríše

863 – na Moravu prišli solúnski bratia *Cyril* (*Konštantín*) a *Metod*
997 – 1038 – *Štefan I.* kráľ v Uhorsku (územie Slovenska pripojené až do roku 1918)
1054 – rozkol medzi západnou (rímsko-katolíckou) a východnou (grécko-pravoslávnou) cirkvou
1095 – začiatok križiackych výprav
1119 – prvá európska univerzita v Bologni (postupný preklad Aristotelových spisov do latinčiny)
1140 – začiatky gotického slohu
1184 – vznik inkvizície
1215 – v Anglicku *Magna charta libertatum –Veľká listina slobôd* (obmedzenie kráľa)
1292 – *Marco Polo* sa vrátil z Číny do Benátok
1320 – stredovek na prahu renesancie
1337 – 1453 – storočná vojna medzi Francúzskom a Anglickom
1348 – založenie Karlovej univerzity v Prahe
1436 – 1445 – Gutenbergova kníhtlač pohyblivými literami (jeho tlačená biblia r. 1455)
1453 – pád Byzantskej ríše
1467 – založenie Akadémie Istropolitany v Bratislave
1492 – *Kolumbus* objavil Ameriku
1498 – vo Florencii bol upálený *G. Savonarola*
1517 – Lutherovo vystúpenie: začiatok protestantskej reformácie
1543 – vyšlo Koperníkovo dielo
1582 – úprava Juliánskeho kalendára, *Gregor XIII.* (po 4.10. nasledoval 15.10.)
1609 – Keplerove zákony, ďalekohľad (*Galilei*)

1618 – 1648 – tridsaťročná vojna
1632 – Galileiho prírodovedný obraz sveta
1640 – začiatok anglickej buržoáznej revolúcie
1657 – kyvadlové hodiny (*Ch. Huygens*)
1683 – porážka Turkov pod Viedňou
1689 – Newtonov nový obraz sveta (*Matematické princípy prírodnej filozofie*)
1751 – 1772 – Francúzska *Encyklopédia*
1765 – Wattov parný stroj
1783 – vyhlásenie nezávislosti Spojených štátov amerických
1789 – začiatok Veľkej francúzskej revolúcie

1791 – ustanovenie metrickej sústavy vo Francúzsku
1800 – galvanická batéria (*A. Volta*)
1820 – nástup európskeho romantizmu v umení a literatúre
1822 – prvá parná železnica v Anglicku
– počítací stroj (*Ch. Babbage*)
1826 – neeuklidovská geometria (*Lobačevskij*)
1831 – elektromagnetická indukcia (*M. Faraday*)
1848 – revolučné hnutie v Európe
1858 – *Darwin* publikoval dielo *O vzniku druhov*
1869 – *Mendelejev*: periodický systém chemických prvkov

1900 – *Planck* vypracoval kvantovú teóriu
1905 – špeciálna teória relativity (*Einstein*)
1914 – prvá svetová vojna
1916 – všeobecná teória relativity (*Einstein*)
1917 – revolúcia v Rusku
1918 – vznik Československej republiky

Aurelius AUGUSTINUS – vyznanie dramatického života

Dávno a dnes

Označili ho za posledného človeka antiky, za tvorcu stredoveku, za záchrancu antického kultúrneho bohatstva, za najhlbšieho mysliteľa novej epochy metafyziky, za objaviteľa hĺbky ľudského ducha, za cirkevného otca západného kresťanstva i za svätého, ktorý nerobil zázraky. Svojou schopnosťou duchovnej intuície, prenikavým intelektom a dôsledným premýšľaním zjednotil spoločné znaky gréckej filozofie a židovsko-kresťanského náboženstva. Ako ranokresťanský filozof patristickej epochy prispel k základnej syntéze kresťanstva, ovplyvnil vytváranie pojmu Boh (nad premenlivosťou rôznych právd musí existovať absolútny prameň každej pravdy), naznačil možnú súdržnosť viery a rozumu. Spoznal úžasnú veľkoleposť a nenapodobiteľnú pestrosť prírody i význam sebapoznania človeka v spolupráci ľudského spoločenstva. Vedel, že ľudská mravnosť nespočíva len vo vedomostiach, ale v tom, čo človek naozaj miluje. *Bez lásky sme si sami sebe na ťarchu, skrz lásku znášame jeden druhého*. Augustinus vnímal význam ľudského podvedomia i hĺbky psychiky, vystihol vážnosť problémov vo vzťahu slov k realite. Na hrane poučenej nevedomosti vybadal, že ľudský rozum môže vnímať harmóniu transcendentnej mohutnosti Ducha. *Poznávaj, aby si uveril, ver, aby si pochopil*.

Názory povolaných i nezúčastnených o hodnotení jeho životného diela sa rozchádzajú

do najpodivnejších protikladov. Málokto spochybňuje, že Aurelius Augustinus (13. 11. 354 – **28. 8. 430**) patrí k najpozoruhodnejším postavám svetových dejín. Jeho *Vyznania* (okolo roku 397) patria medzi najhlbšie náboženské diela svetovej literatúry i najúprimnejšie autobiografie. Sú skvostom na pomedzí hlbokého citového poryvu ľudskej duše a úprimnej modlitby dúfajúceho človeka. Augustinus vytvoril filozofické práce *O slobodnom rozhodovaní, O poriadku, O krásnom a vhodnom, O hudbe, O učiteľovi,* nábožensko-meditatívne pojednania *O cnosti, O blaženom živote, O duši, O prirodzenosti a milosti, O kresťanskej náuke* i teologicko-dogmatické štúdie *O pravom náboženstve, O Trojici, O užitočnosti viery, O milosti Božej, O Božej obci* (413–424). Napísal veľké množstvo polemicko-apologických úvah, kázní, prejavov i listov. Celé Augustinove literárne dielo (viac než 90 pojednaní) je výrazným prejavom túžby po vzájomnom súžití kresťanskej viery a ľudskej prirodzenosti.

Životný osud

Do škôl chodil v rodnom Tagaste, Madaure i v Kartágu. Tam neskôr vyučoval rétoriku a gramatiku. Stal sa stúpencom manichejcov (373). Počas úspešného pedagogického pôsobenia v Ríme (383) sa odklonil od tohto bludného náboženského smerovania. V Miláne vystupoval ako rečník, tam sa zoznámil s novoplatónskou filozofiou i biskupom Ambrózom, študoval listy apoštola Pavla. Nechal sa katolícky pokrstiť (387) spolu so synom Adeodatom. Po návrate do Afriky (388) viedol rehoľný život v kláštore. V roku 391 bol vysvätený za kňaza, v rokoch 396-430 bol biskupom v severoafrickom meste Hippo Regius. Pozostatky sv. Augustina sú uložené v dominikánskom kostole v Pávii.

Výchovný rozhovor

Ľudská reč je možno určená práve na to, aby sme sa vzájomne učili, pripomínali niečo sebe aj iným. *Ten, kto rozpráva, dáva pomocou artikulovaného zvuku najavo znak svojej vôle*. Aurelius Augustinus uznal nesmierne významnú úlohu komunikácie medzi ľuďmi, ale spoznal aj problémy zo sporov vo vzťahu popisných slov a faktickej reality. Slová sú materiálne zvuky majúce význam na základe dohody, zmysel im dáva rozum. Svoje názory vyložil v rozprave *O učiteľovi* (359). Ponúkol zamyslenie nad možnosťou vnímať a odovzdávať si pravdu zo sveta priestoru, času a príčinnej následnosti. *Neučíme sa slovami znejúcimi navonok, ale vnútri nás učí pravda*.

Podľa Augustinovho presvedčenia nestačí samotné rozumové ľudské bádanie na zaistenie celého potrebného poznania. Na ceste za pochopením jasného svetla nemennej pravdy nesmieme zanedbávať ani prirodzený ľudský cit, ani nezvyčajnú inteligenciu zvlášť nadaných jednotlivcov. Pre hlbšie poznanie je nevyhnutná vnútorná túžba pre duchovné porozumenie, prehĺbený láskavý vzťah ku skúmaným skutočnostiam. Ani spoločensky uzákonená moc, svetské pocty, bezbrehé materiálne bohatstvo, ani bezuzdný sex nie sú zábezpekou pre zmysluplné ľudské skutky pripravujúce cestu pozemskej humanity k ideálom dobra, pravdy a spravodlivosti.

Z myšlienok

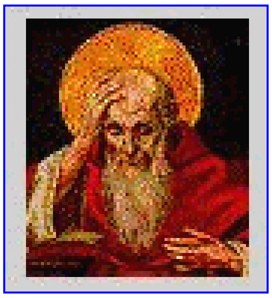
Ukážme citovaním niekoľkých pedagogicko-výchovných myšlienok Aurelia Augustina jeho súdobé postoje a názory:

- *Nikto nech nehovorí, že už pravdu našiel. Hľadajme ju tak, ako by ju nepoznal nikto. Pravda môže byť skôr starostlivo a vo svornosti hľadaná, pokiaľ sa nepredpokladá, akosi zbrklo a vystatovačne, že už bola nájdená.*
- *Je lepšie, aby pohoršenie vzniklo, než aby sa pravda utajovala.*
- *Ak hľadáš pravdu, drž sa cesty, lebo aj cesta je už pravdou.*
- *Aby sa človek niečo naučil, potrebuje omnoho viac spontánnej zvedavosti ako donútenia zo strachu.*
- *Správne otázky, vedieť, čo chceme nájsť, sú dôležité pre objavovanie.*
- *Kto sa nenechá premôcť pravdou, nad tým zvíťazí omyl.*
- *Musíme rozumieť, aby sme mohli uveriť.*
- *Naša dokonalosť je v tom, že vieme, že sme nedokonalí.*
- *Budeme hľadať tak, akoby sme mohli nájsť, ale nikdy nenájdeme tak, aby sme mohli prestať hľadať.*

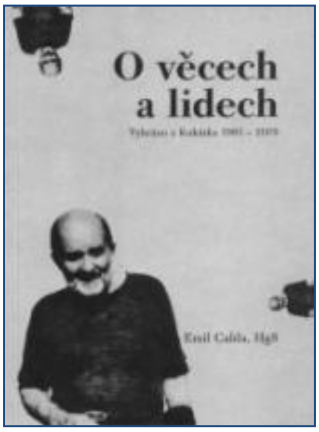
Aj náznak matematiky

V pojednaní *O hudbe* uviedol Aurelius Augustinus názor o tom, že matematické princípy sú základom vesmírneho poriadku. Ľudský rozum je schopný vnímať nadčasové matematické pojmy i pravdy o abstraktných všeobecných súvislostiach. Matematiku možno chápať aj ako medzistupeň od vnímanej reality k duchovnej metafyzike. Geometria i harmónia sú prejavom určitého matematického systému v prírode. *Čísla sú formou Božskej múdrosti prítomnej vo svete... Všetko má tvar, pretože všetko má čísla. Odober im čísla a budú ničím... Všetko je na svojom mieste vďaka číslam. Všetko sa deje v pravý čas vďaka číslam*. Augustinus považoval čisté matematické pravdy za istejšie než vnemy našich zmyslov. Uvažoval o krásnom i vhodnom. *Krása je v číselných pomeroch... Hudba aj architektúra sú sestry, obe sú deťmi matematiky. V hudbe sa večná harmónia ozýva, v architektúre zrkadlí*. Pri pohľade na mozaikovú dlažbu spoznáme jej krásu len vtedy, ak sa okom sústredíme nie len na malý kúsok, ale práve na celok. Iba v úplnom pochopení ľudskej prirodzenosti môžeme vybadať komplexnú krásu i mohutný zmysel poslania každého človeka.

Trvalá spomienka



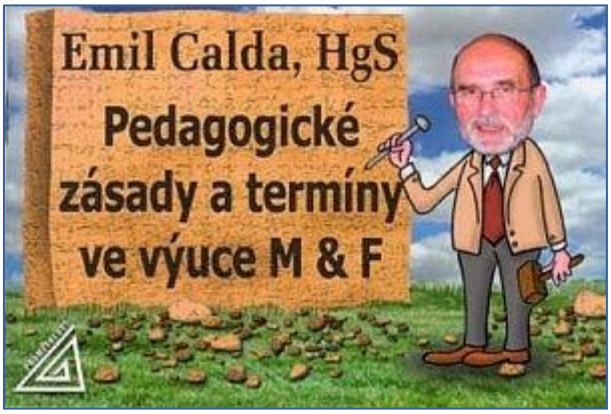
Aurelius Augustinus bol kritický nezávislý osobnostný zjav s výnimočnou schopnosťou prenikať k zásadným záverom odpovedí na zložité existenciálne otázky. Vždy a vo všetkom skúmal podstatu javov, pochopil svet v nás i okolo nás ako vyvíjajúci sa proces, mal dôveru v racionálny model našich predstáv, Pretvoril múdrosť pohanského sveta do rozmeru vnútorného kresťanského ducha. Chcel povzniesť ľudský rozum k Bohu a srdce človeka naplniť láskou (najvyššou ľudskou hodnotou i pravou povahou Boha ako jedinečnej tvorivej sily, privádzajúcej svoje rozumné stvorenia do spoločenstva lásky). Uznal autoritu zjavenia ako usmernenie, ktorým ľudský rozum postupne spoznáva, že ľudskosť a jej intelektuálny systém (s jeho logikou i matematikou) sú vrcholné črty sveta, v ktorom žijeme. Myšlienkový duchovný rozvoj chápal ako prehlbujúci sa vzťah ľudskej duše k Bohu, ako postupné spoznávanie pravdy v Božej milosti. Napriek tomu, že Augustinus vedel, že je sám pre seba hádankou, ako syn mnohých sĺz, nebude v ľudských dejinách (od času k večnosti), ani pre ťažké pochybenia telesného i duchovného zápasu, ani pre rôzne nejednoznačnosti svojho diela, beznádejne stratený. (spracoval D. JEDINÁK)



Každý z nás se během školní docházky jistě aspoň jednou zeptal: *„K čemu mi to vůbec bude?“* Teprve nyní, když už jsem velký, přišel jsem na to, jaká je asi správná odpověď: *„K čemu ti to bude, záleží jen a jen na tobě. Možná že k ničemu, když tě to nezajímá a nebaví. Možná ale také, že je to jeden z kamínků, z nichž se časem složí mozaika tvé životní moudrosti. Sám o sobě je každý poznatek k ničemu.* ***Na tobě záleží, co s ním uděláš!***“

Doc. RNDr. Emil CALDA, CSc, HgS (rtuťovitý stařík), KDM MFF UK Praha
(in *O věcech a lidech*, kapitola *Jak jsem chodil do školy*.)

Dobrý učitel matematiky je učitel, který sice ví, že vám matematika k ničemu nebude, ale po jeho výkladu získáte dojem, že se bez ní v životě neobejdete.

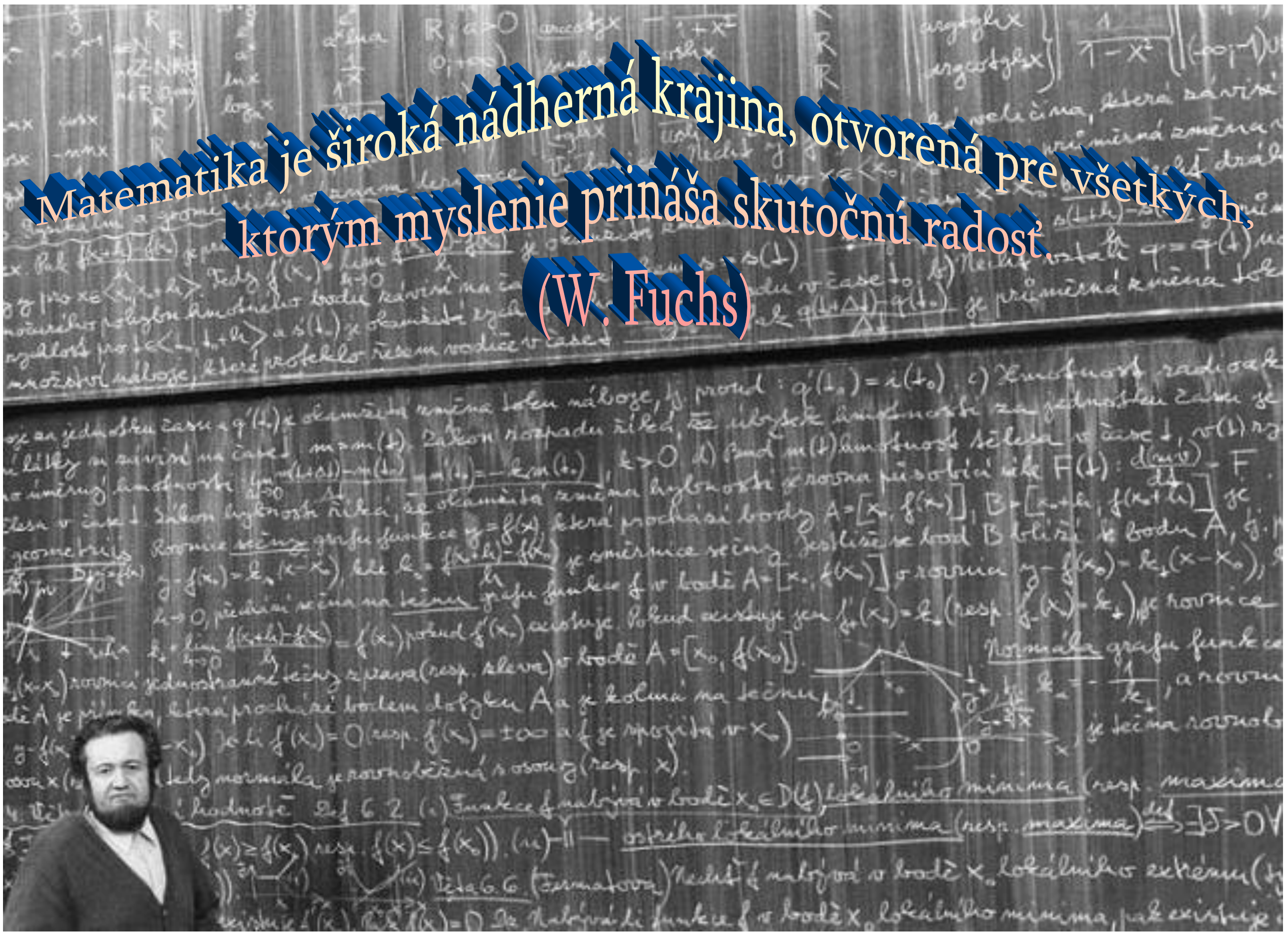


Desatoro Emila Caldu

- ✓ *Matematiku učíme lidsky, občas i s humorem.*
- ✓ *Matematiku učíme tak, aby žáky vůbec nenapadlo, že ji možná vůbec nebudou potřebovat.*
- ✓ *Máme stále na paměti, že i matematický antitalent může vyrůst v dobrého člověka.*
- ✓ *Rozlišujeme mezi tím, co je důležité více a co méně. Je-li důležité všechno, není důležité nic.*
- ✓ *Rozvíjíme nejen počtářskou zručnost, ale i matematické myšlení.*
- ✓ *Nezatemňujeme jednoduché záležitosti tím, že z nich uděláme „vědu“.*
- ✓ *Využijeme každé možnosti k tomu, abychom pohovořili o tom, co vůbec matematika je, jaké pravdy hledá, co přináší, o co usiluje.*
- ✓ *Věnujeme dost času shrnutí důležitých pojmů a vět, tomu, jak se k nim dospělo, kteří matematikové se na nich podíleli, jaký byl svět, ve kterém žili, v co věřili, čeho dosáhli.*
- ✓ *Čas od času se na probírané učivo podíváme globálně a pohovoříme o řecké geometrii, o řešitelnosti algebraických rovnic, o vzniku diferenciálního počtu a pod.*
- ✓ *Není na škodu ukázat, že matematika není „ukončená“ a že existuje (a bude vždy existovat) řada dosud nevyřešených otázek.*

Odpoveď niektorým žiakom i študentom:

*Na čo Ti bude **matematika**, záleží iba na Tebe.*
Možno, že na nič, keď Ťa nezaujíma a nebaví.
Ak by si sa ale aspoň trochu snažil,
možno by si niekedy neskôr vedel
lepšie zápasiť s niečím iným.
(E. Calda)



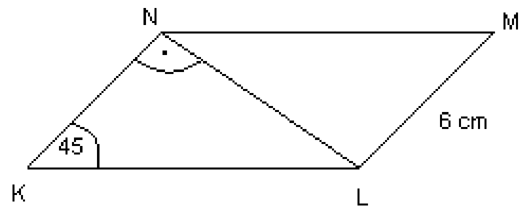
- *Štúdiom matematiky kultivujete seba samých, štúdium matematiky prispieva k rozvoju myslenia, k pestovaniu predstavivosti a kritickosti, rozvíja umenie vidieť súvislosti a riešiť problémy* (F. Kuřina).

- *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť poznávať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu* (G. Polya).

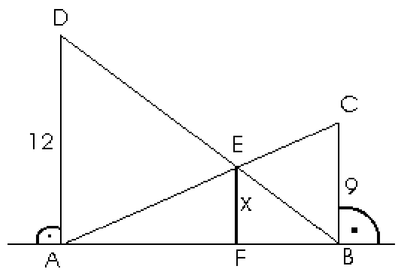
- *Originalita matematiky spočíva v tom, že v matematickej vede sú vyjadrené vzťahy medzi vecami, ktoré sa bez sprostredkovania ľudským rozumom nedajú vôbec postihnúť* (A.N. Whitehead).

Šestnásť úloh pre Taduša

1. Povedzte, čo sa stalo, ak sa ukázalo, že tvrdenie *Ak je dnes utorok, tak sme v Belgicku,* nebolo pravdivé. (*Bol utorok a nie sme v Belgicku.*)
2. My dvaja spolu sme našli 70 húb. Medzi mojimi je presne 5/9 dubákov. Medzi tvojimi je presne 2/17 šampiňónov. Koľko húb som našiel? (36)
3. Žiak prečítal knihu za 12 dní. Ak by prečítal každý deň o 5 strán viac, prečítal by ju o 4 dni skôr. Stanovte, koľko strán má táto kniha. (120)
4. Stanovte, koľko prirodzených čísel menších ako 1000 možno napísať len pomocou cifier 1, 5, 7 (cifry sa môžu opakovať). (39)
5. Podstava nádrže tvaru kvádra má rozmery 6 m a 9 m. Napustením 405 hl vody sa naplnila nádrž na 15 % svojho objemu. Určte hĺbku nádrže. (5m)
6. Päť robotníkov vyrobí za 6 dní 70 výrobkov. Vypočítajte, koľko výrobkov vyrobí deväť rovnako výkonných robotníkov za 10 dní. (210)
7. Cena vstupeniek vzrástla o 40 %, za vstupenky sa vybralo len o 26 % viac. Určte o koľko percent klesla návštevnosť predstavenia. (o 10%)
8. Stanovte obsah kosodĺžnika *KLMN* (pozri obrázok): (36 cm^2)



9. V našom meste je 3/5 žien vydatých za 2/3 mužov. Určte aká časť obyvateľstva je slobodná (nežije v manželstve). (7/19)
10. Stanovte, koľko rokov mal matematik A. MORGAN (1806–1871), keď prehlásil: *V roku x^2 som mal x rokov.* (43)
11. V pravouhlom trojuholníku *ABC* sú odvesny dlhé 6 *cm* a 8 *cm*. Stanovte dĺžku polomeru kružnice opísanej trojuholníku *ABC.* (5 cm)
12. Čerstvé huby obsahujú 88 % vody, sušené iba 14 % vody. Koľko kg čerstvých húb treba nazbierať, aby sme získali 3 kg sušených? (21,5 kg)
13. Stanovte súčet prirodzených čísel $p + q$, ak viete, že $p \cdot q = 10000$ a žiadne z čísel p, q nie je deliteľné desiatimi. ($16 \cdot 625 = 641$)
14. Knižka má očíslovaných 972 strán (prirodzené čísla od 1 do 972 vrátane). Určte, koľkokrát sa na očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 7. (290)
15. Stanovte, akú časť zmiešaného lesa chcú lesníci vyrúbať, ak ich vedúci nevinne vyhlásil: *Budeme rúbať iba sosny, ktorých je v našom zmiešanom lese 99 %. Po výrube budú sosny tvoriť 98 % všetkých ponechaných stromov.* (1/2)
16. Vypočítajte veľkosť x (údaje sú na obrázku): (36/7)



Matematika nie je ilustrovaný časopis, ktorý možno začať čítať na ktorejkoľvek strane...
Matematika učí vytvárať presnými logickými úvahami platné závery...
(profesor Š. Schwarz)

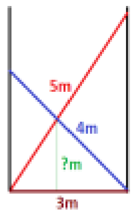
Desať úloh pre Tobiho

1. Stanovte deväťciferné číslo, v ktorom sa každá z číslic 1, 2, ... 9 vyskytuje práve raz a pritom platí, že číslo tvorené prvými dvoma číslicami kódu (zľava) je deliteľné dvoma, číslo tvorené prvými tromi číslicami kódu je deliteľné tromi, číslo tvorené prvými štyrmi číslicami kódu je deliteľné štyrmi atď., až napokon číslo tvorené všetkými deviatimi číslicami kódu je deliteľné deviatimi. (147258369; 381654729)

2. Sirup je potrebné riediť v pomere 2 : 9. Predtým ho niekto rozriedil v pomere 3 : 5. V akom pomere teraz treba rozriediť ten predpripravený koncentrát, aby to bolo tak, ako to má byť? (16 : 17)

3. Z 33 účastníkov konferencie ovládalo 8 ruský a anglický jazyk, 14 anglický a slovenský jazyk a iba 5 slovenský a ruský jazyk. Traja účastníci ovládali všetky tri jazyky. Počet tých, ktorí ovládali iba jeden z týchto troch jazykov bol pre každý jazyk rovnaký. Stanovte koľko účastníkov ovládalo slovenský, koľko ruský a koľko anglický jazyk, keď každý účastník ovládal aspoň jeden z nich. (20; 14; 23)

4. Do "dvojrozmernej studne" s vodorovným dnom a zvislými stenami vzdialenými od seba 3 metre sme hodili dve rovné palice dĺžok 4 a 5 metrov, ktoré sa ustálili v pozícii zaznačenej na obrázku. Ako vysoko od dna leží bod, v ktorom sa tieto palice "pretínajú"? (1,59 m)



5. Stanovte počet šesťmiestnych prirodzených čísel, ktoré neobsahujú cifru 2 ani cifru 4. ($7 \cdot 8^5 = 229376$)

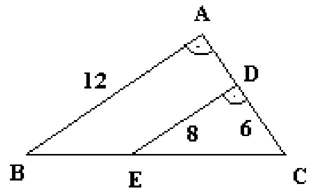
6. Odvoďte vzorec pre výpočet obsahu kosoštvorca pomocou dĺžok jeho uhlopriečok. ($e \cdot f/2$)

7. Stanovte, koľko litrov vody je potrebné priliať do 58 litrov liehu s koncentráciou 94 %, aby sme dostali lieh s koncentráciou 58 %. (36)

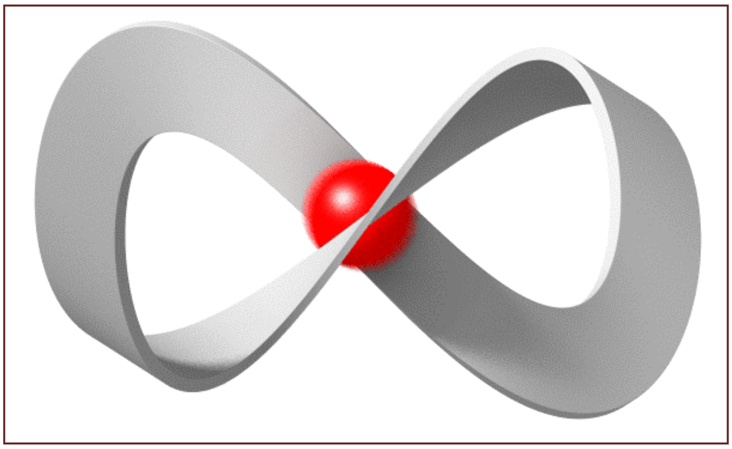
8. Do nepriehľadného vrecúška sme vložili štyri modré, dve červené a jednu zelenú guľku. Náhodne vyberieme jednu guľku, zaznačíme si jej farbu a vložíme naspäť. Znovu vyberieme náhodne ďalšiu guľku a zaznačíme si jej farbu. Stanovte pravdepodobnosť, že pri týchto dvoch výberoch ani raz nevytiahneme červenú guľku. (25/49)

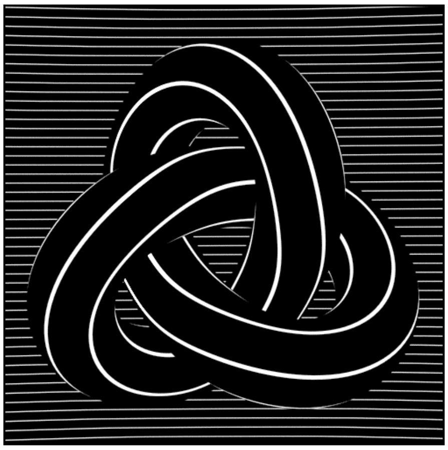
9. Keby bol každý schod o 3 cm nižší, bolo by ich na rozhľadňu o 60 viac. Keby bol každý schod o 3 cm vyšší, bolo by ich o 40 menej. Aká vysoká je rozhľadňa? (36 m)

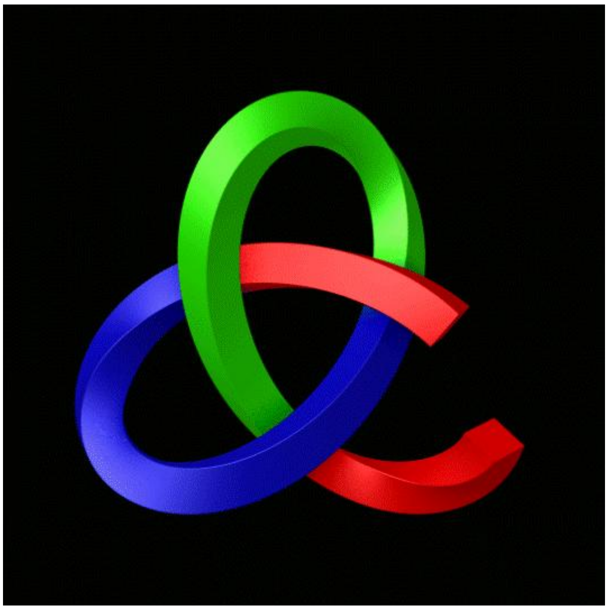
10. Stanovte veľkosť úsečky *BC*, ak údaje o veľkostiach úsečiek *AB*, *ED*, *CD* sú uvedené v cm na obrázku. (15 cm)

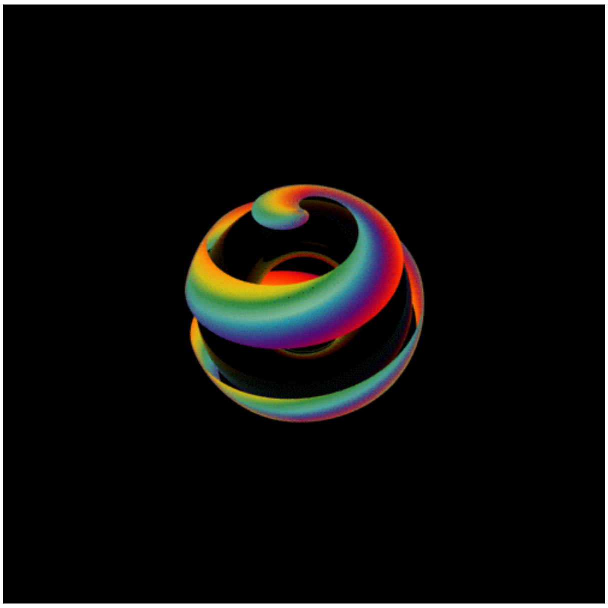


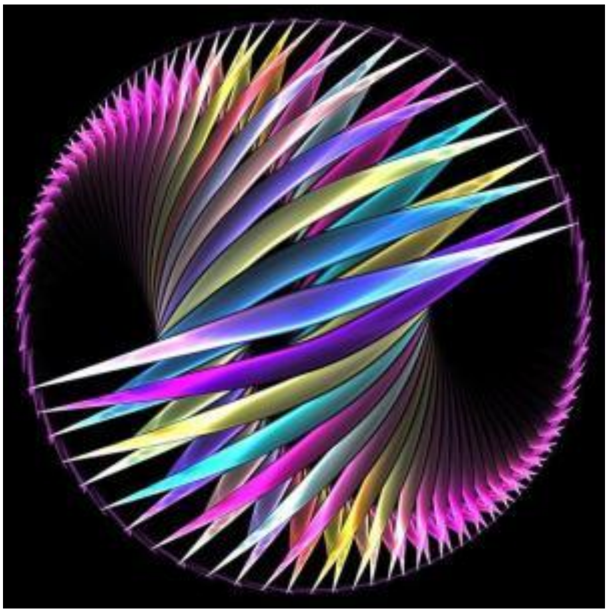
Matematika je *široká nádherná krajina, otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú radosť* (W. Fuchs).

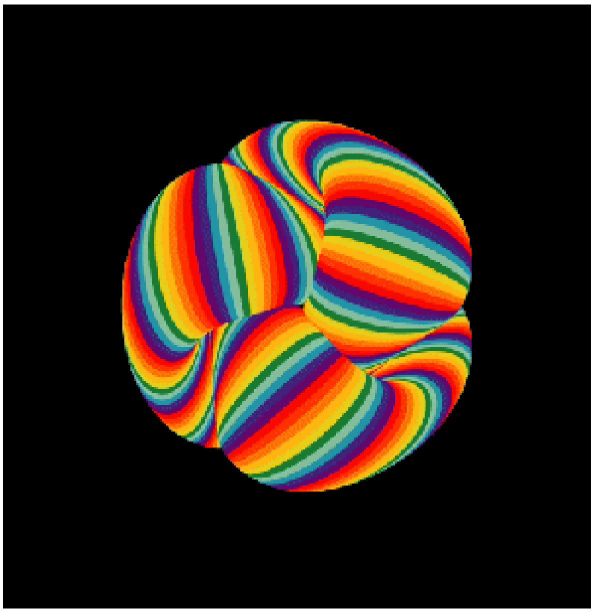




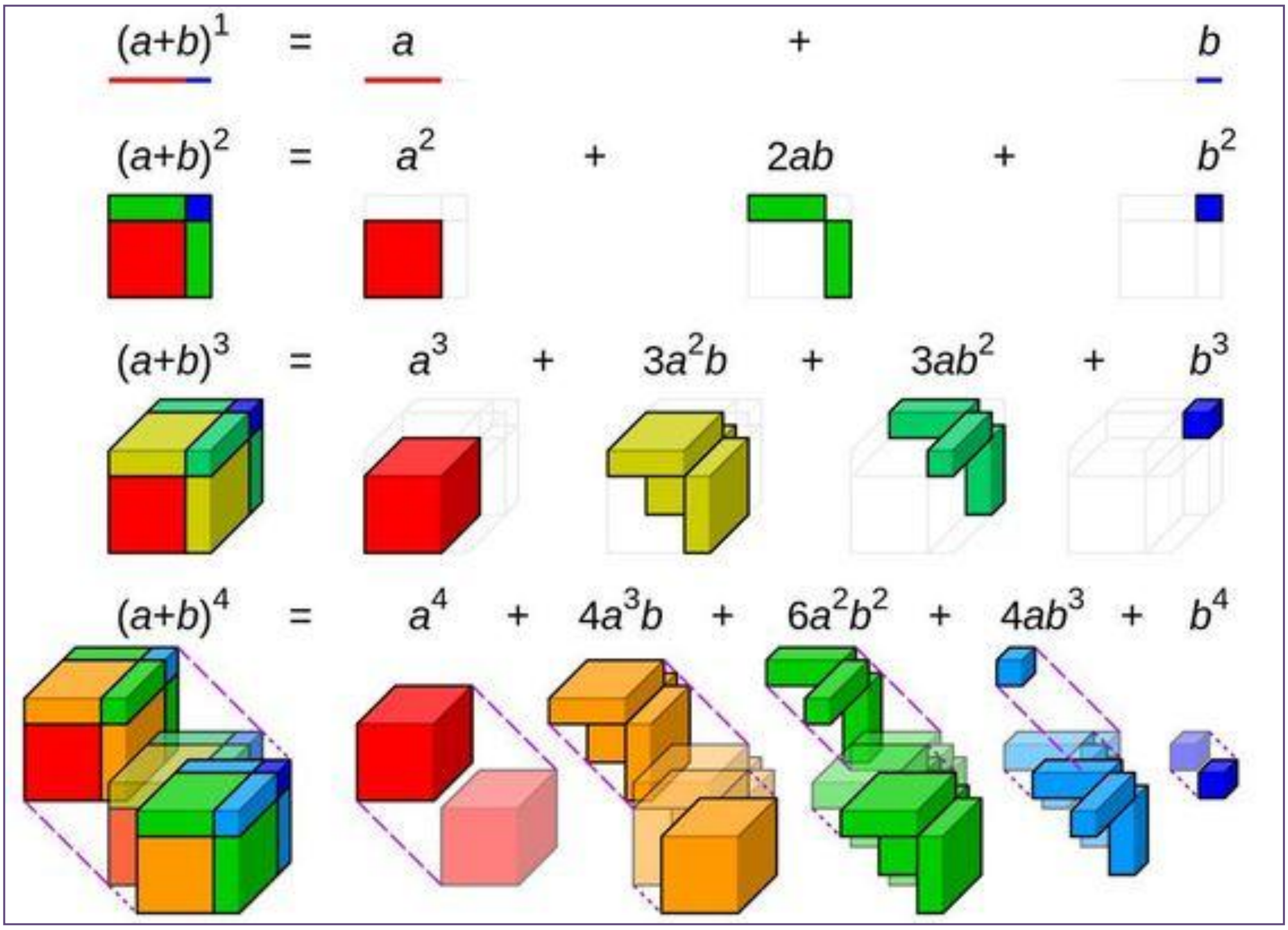


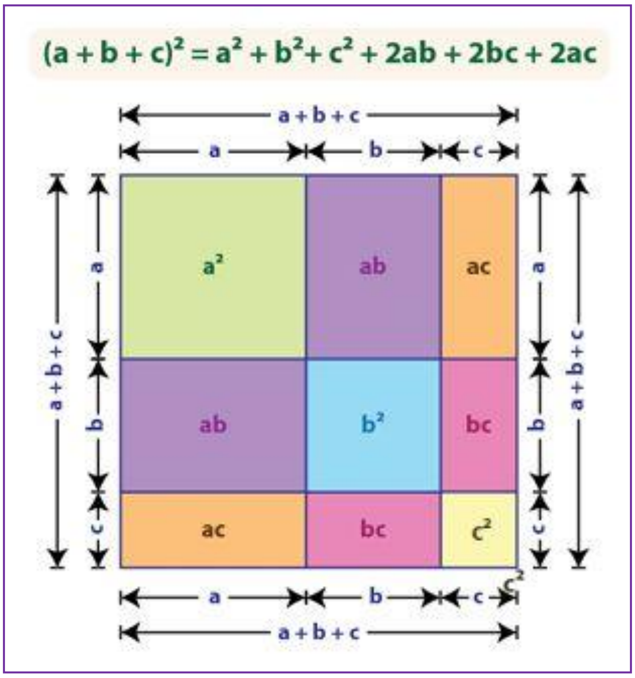


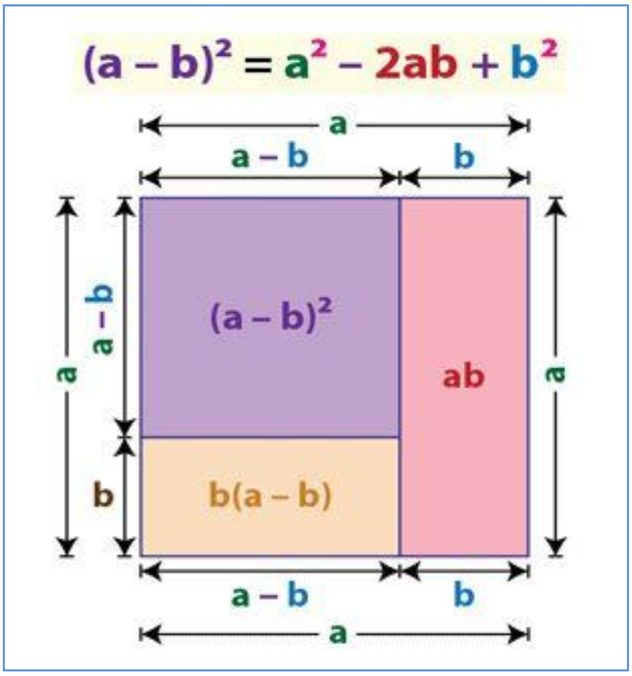


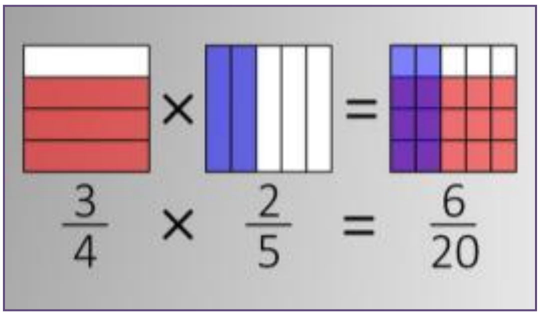


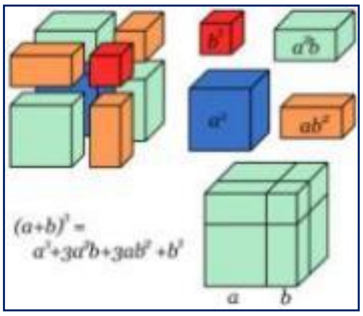
Každý má svoje problémy. Niekto má riedku polievku, iný malé brilianty.

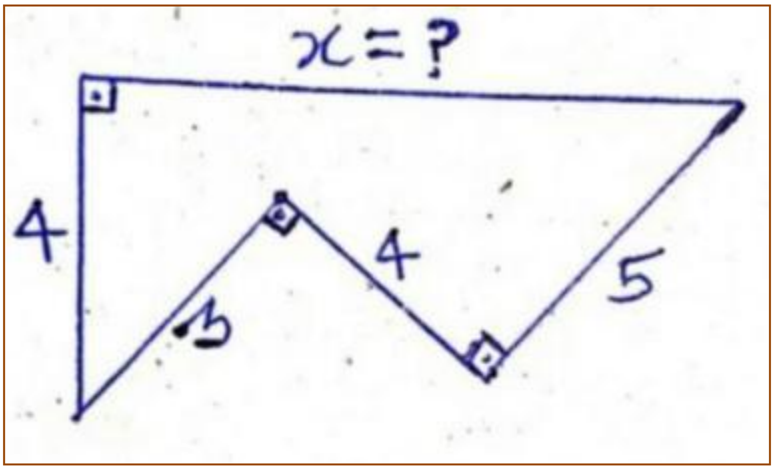

(a+b)^1 = a + b
(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2
(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4

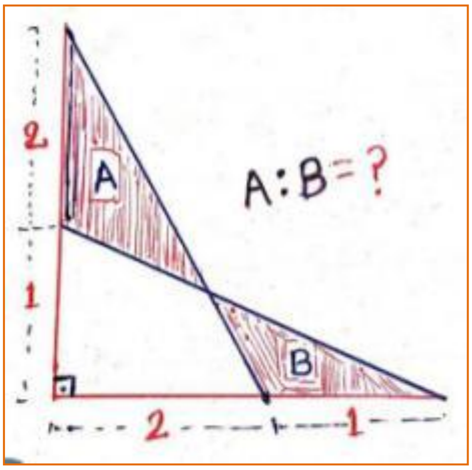

(a + b + c)² = a² + b² + c² + 2ab + 2bc + 2ac
a + b + c
a
b
c
a²
ab
ac
b²
bc
c²

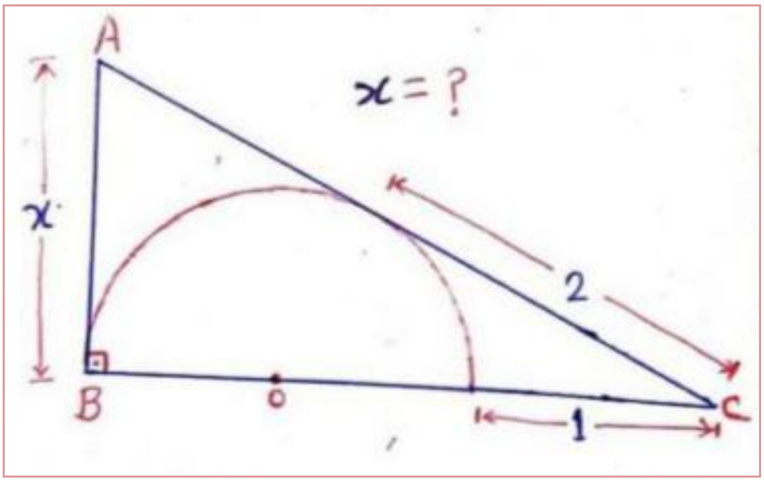

(a – b)² = a² – 2ab + b²
a
a – b
b
(a – b)²
ab
b(a – b)

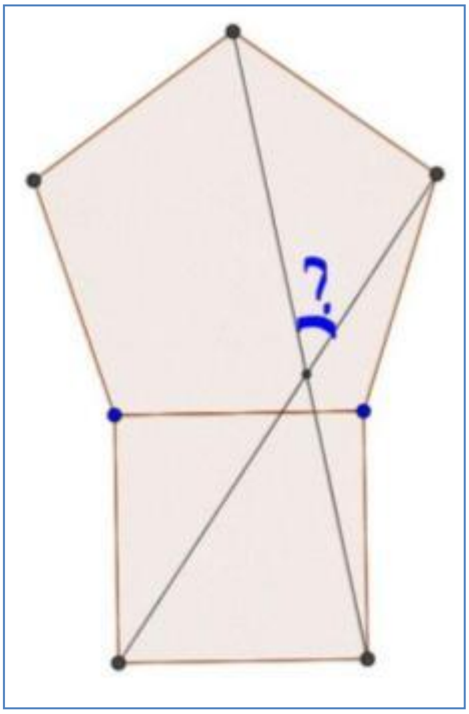

3/4 × 2/5 = 6/20

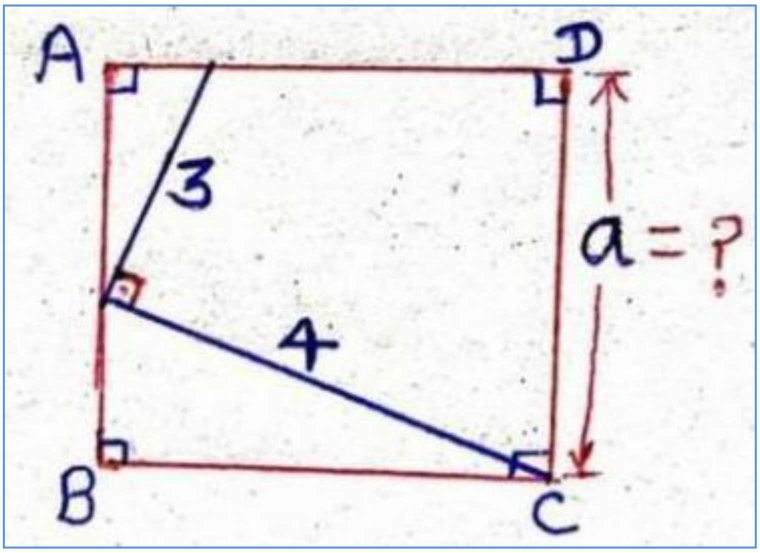


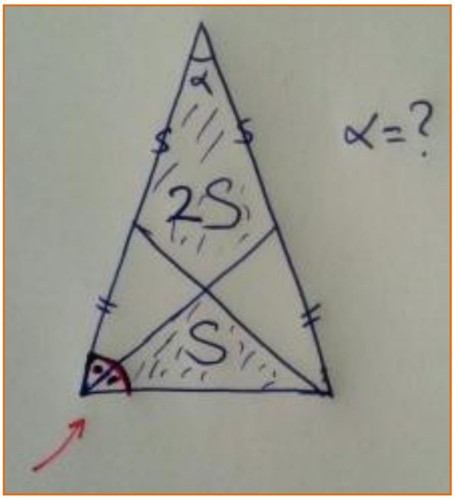

x = ?
4
3
4
5

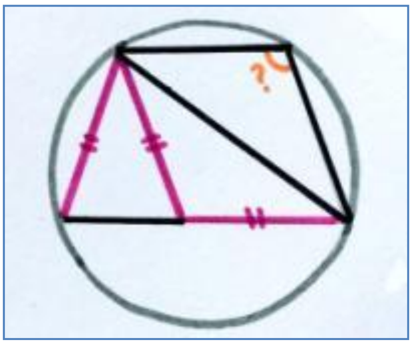

A : B = ?
2
1
A
B
2
1

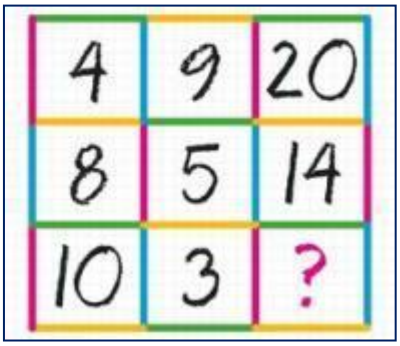

A
x = ?
x
2
B
o
1
C



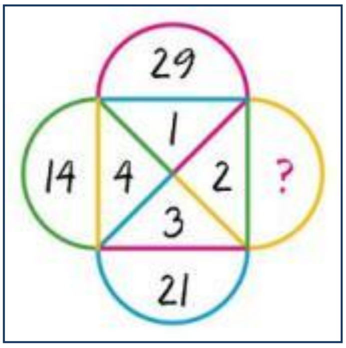

A
D
3
a = ?
4
B
C

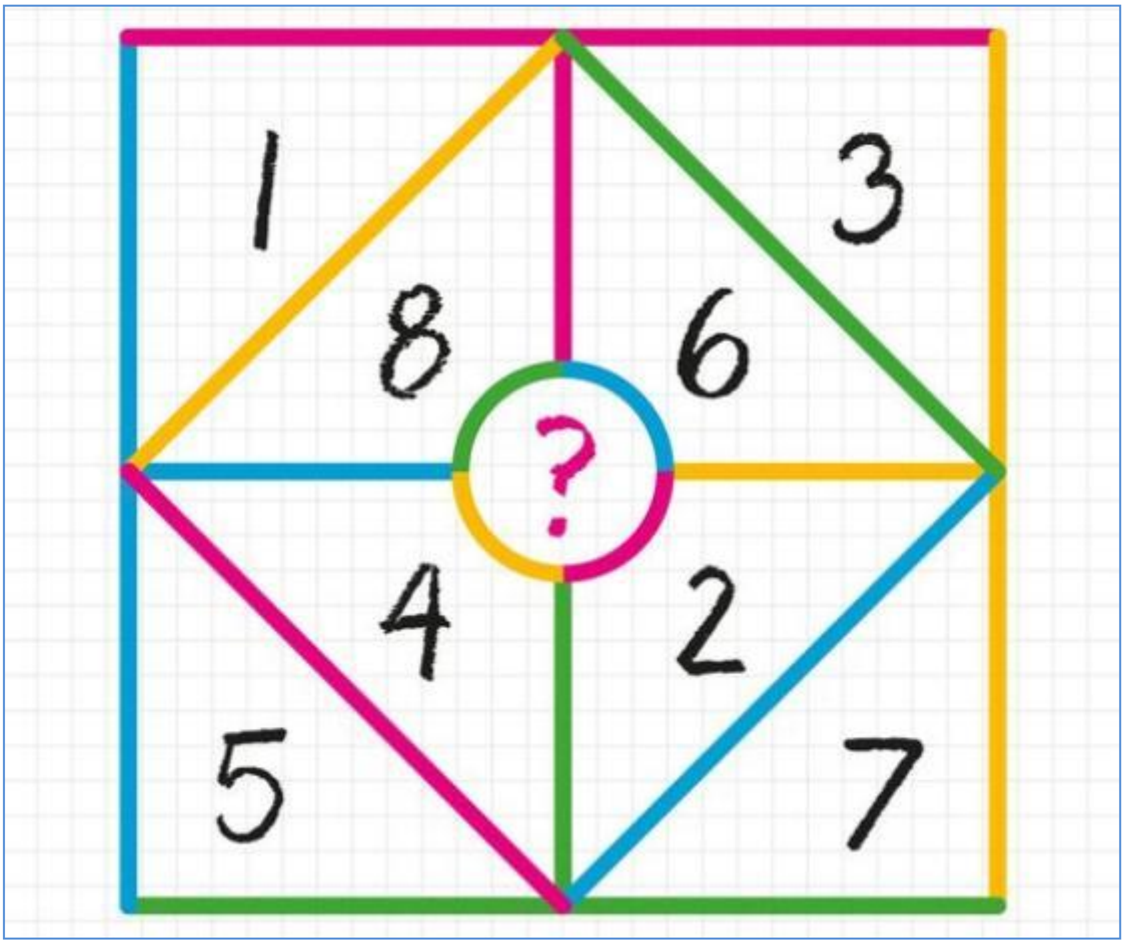

α
α = ?
2S
S

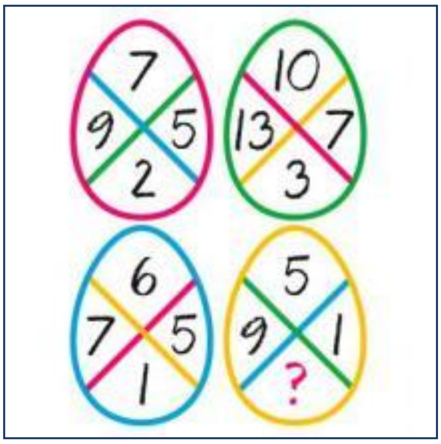


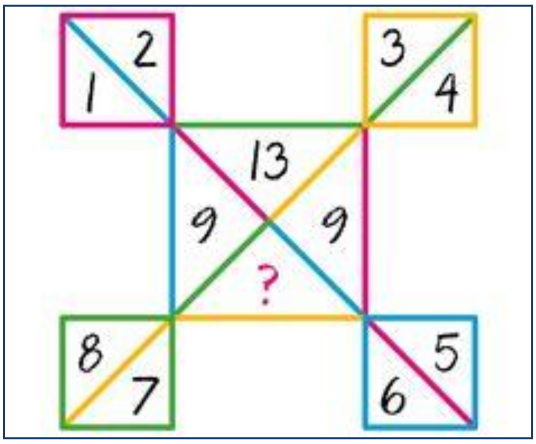

4
9
20
8
5
14
10
3
?


?
8
13
18
24
39


29
1
14
4
2
?
3
21


1
3
8
6
?
4
2
5
7


7
9
5
2
10
13
7
3
6
7
5
1
5
9
1
?


2
1
3
4
13
9
9
?
8
7
5
6

5 → 19
6 → 30
7 → 43
8 → ?

56	65	78
12	?	30
44	14	48

3	1	7
4	2	?
5	3	9

2 + 3 = 10
8 + 4 = 96
7 + 2 = 63
6 + 5 = 66
9 + 5 = ???

1 + 4 = 5
2 + 5 = 12
3 + 6 = 21
8 + 11 = ?

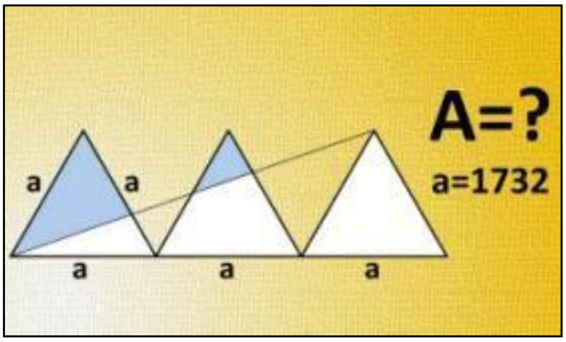
5 X 3 = 51
5 X 5 = 52
5 X 4 = 02
5 X 3 = 51
5 X 6 = ??

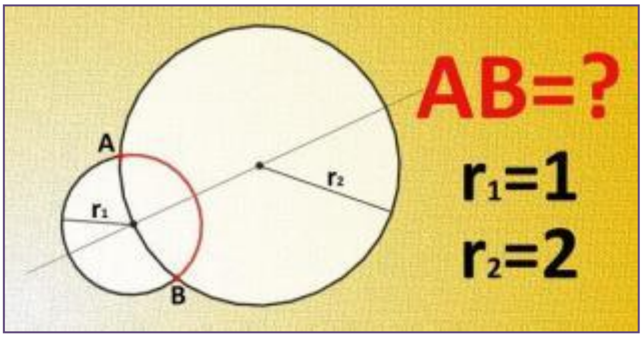
	30		
	36	?	
12			35
	4	49	
	14		

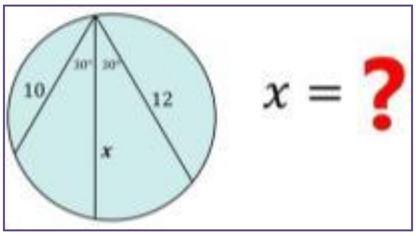
2+3=8,
3+7=27,
4+5=32,
5+8=60,
6+7=72,
7+8=??

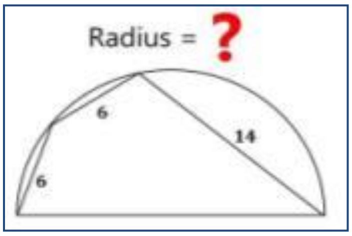
2+2 = 8
3 +3 =18
5+5= 50
6+6=72
10+10= ??

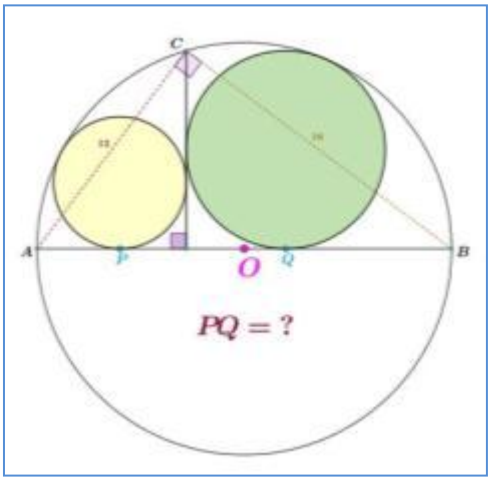
1 + 4 = 5
2 + 5 = 12
3 + 6 = 21
8 + 11 = ?


A=?
a=1732
a
a
a
a
a

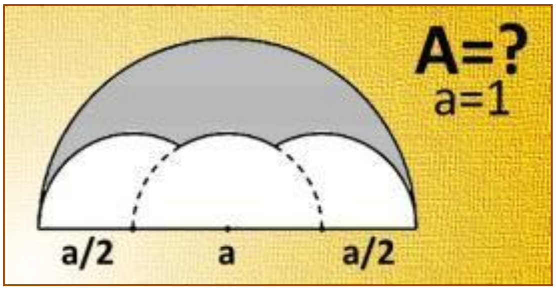

AB=?
r₁=1
r₂=2
A
B
r₁
r₂

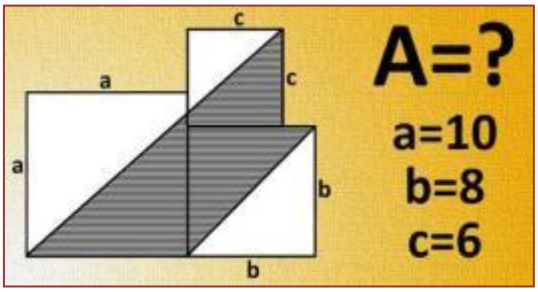

30° 30°
10
12
x
x = ?

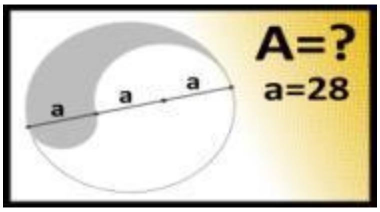

Radius = ?
6
6
14

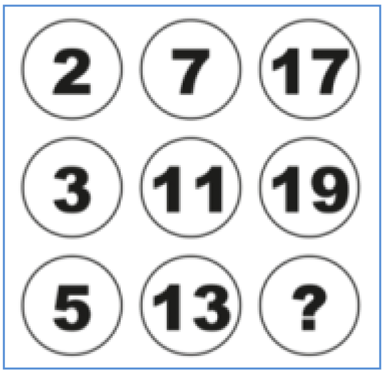

C
A
B
P
O
Q
PQ = ?

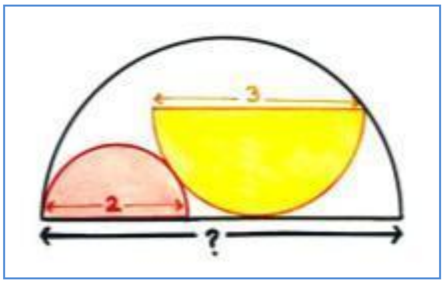

2
?
3

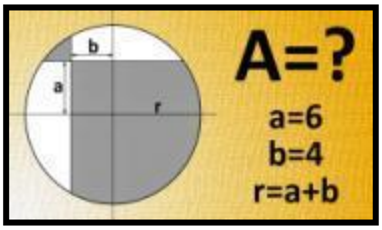

A=?
a=1
a/2
a
a/2

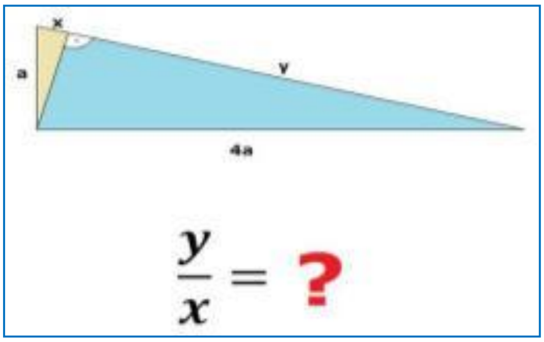

c
a
c
a
b
b
A=?
a=10
b=8
c=6

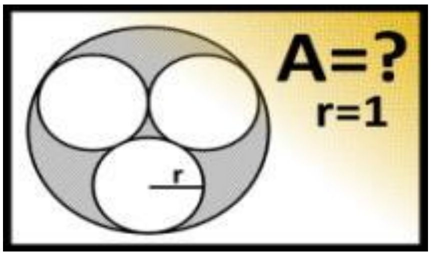

A=?
a=28
a
a
a


2
7
17
3
11
19
5
13
?

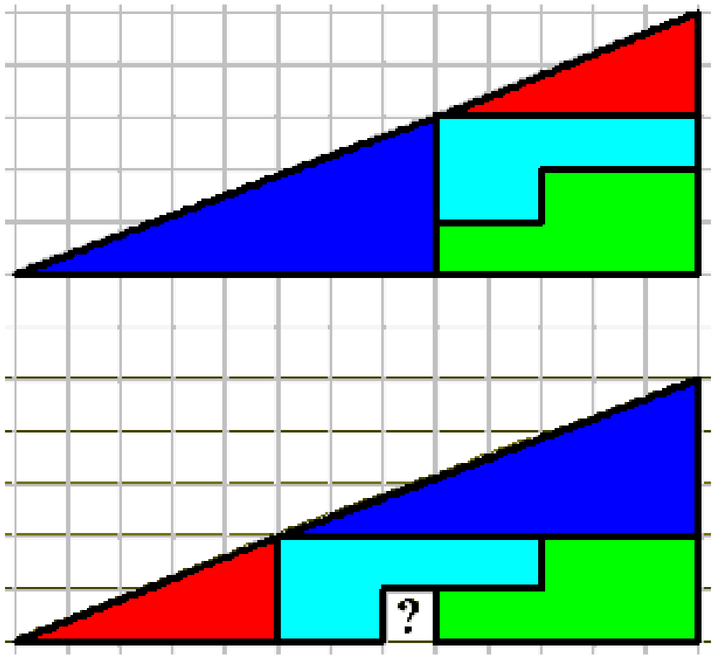

3
2
?

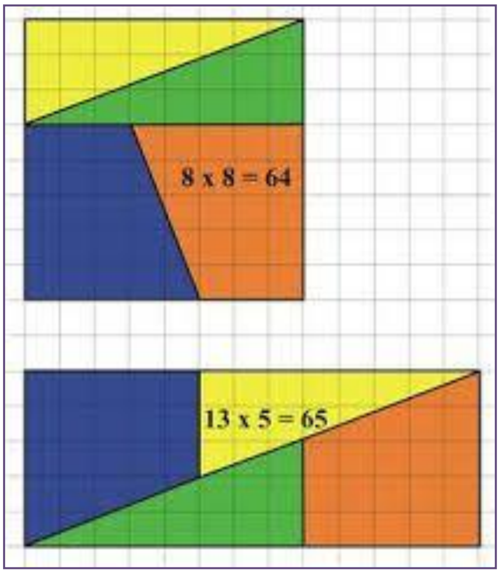

A=?
a=6
b=4
r=a+b
b
a
r


x
a
y
4a
y/x = ?


A=?
r=1
r

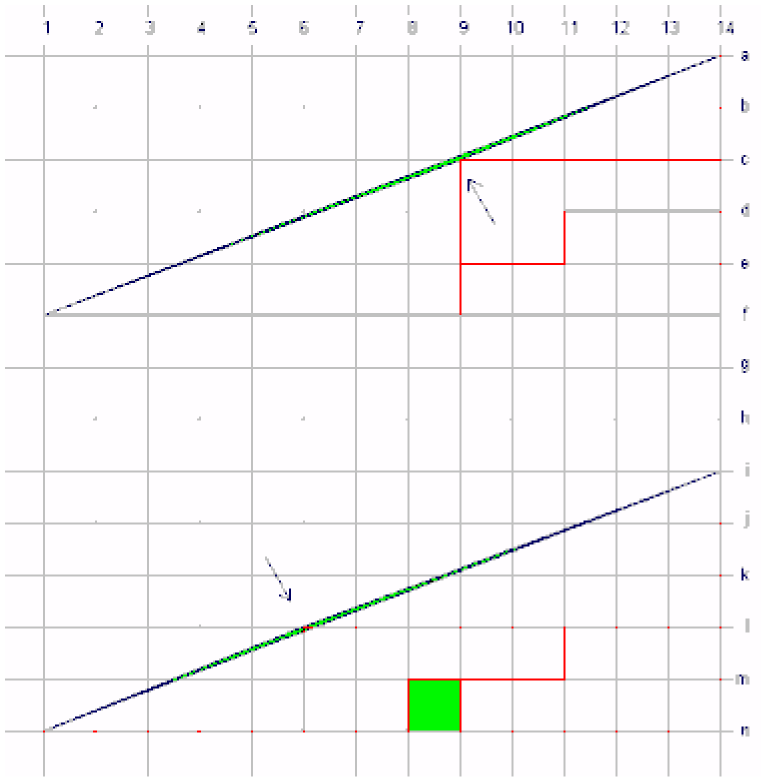
Odkiaľ sa vzala diera v druhom obrazci?

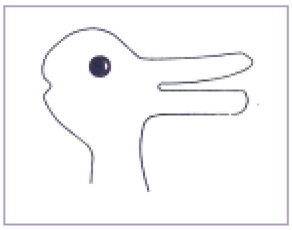




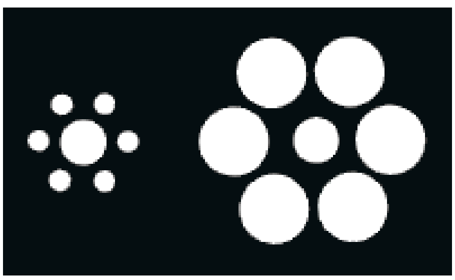
Riešenie:

Ako trojuholník sa to zdá preto, lebo bola použitá hrubá čiara.
Ďalšie vrcholy sú označené šípkami (c9; l6).
Súčet obsahov úzkych trojuholníkov vyfarbených zelenou farbou, dáva potom obsah štvorčeka (?).
Prepona celého trojuholníka **nie je rovná úsečka**, ale je vytvorená z dvoch nerovnobežných úsečiek.





Hlava zajaca alebo kačice?



Je ten kruh vlevo uprostřed stejný jako vpravo uprostřed?

Zaujímavé čísla

Číslo **9210857643**

je vyjadrením zoradenia názvov číslic podľa slovenskej abecedy.

(Číslo 9 210 857 643 obsahuje všetkých desať základných číslic zoradených podľa ich slovenského abecedného názvu: **dev**äť, **dv**a, **j**eden, **n**ula, **o**sem, **p**äť, **s**edem, **š**esť, **št**yri, **tr**i.)

Číslo **23421314** (aj **41312432**)

je vyjadrením usporiadania dvoch jednotiek, dvoch dvojok, dvoch trojok a dvoch štvoriek tak, že medzi dvoma jednotkami je jedna iná cifra, medzi dvomi dvojkami sú dve iné cifry, medzi dvomi trojkami sú tri iné cifry a medzi dvomi štvorkami sú štyri iné cifry.

Číslo **6210001000**

je desaťciferné číslo, ktoré na prvom mieste zľava cifrou určuje počet núl v tomto čísle, na druhom mieste vyjadruje cifra počet jednotiek v tomto čísle, atď., až na poslednom mieste cifra určuje počet deviatok v tomto čísle. Je teda riešením úlohy. Stanovte desaťciferné číslo, ktoré svojimi ciframi postupne zľava určuje počet núl, jednotiek, ... až deviatok v tomto čísle.

Čísla **147258369**; **381654729**

sú dve deväťciferné čísla – kódy, v ktorých sa každá z číslic 1, 2, ... 9 vyskytuje práve raz a pritom platí, že číslo tvorené prvými dvoma číslicami kódu (zľava) je deliteľné dvoma, číslo tvorené prvými tromi číslicami kódu je deliteľné tromi, číslo tvorené prvými štyrmi číslicami kódu je deliteľné štyrmi atď., až napokon číslo tvorené všetkými deviatimi číslicami kódu je deliteľné deviatimi.

Číslo **6210001000** postupne zľava číslicami vyjadruje počet núl, jednotiek, dvojok, atď. až po počet deviatok v tomto danom desaťcifernom čísle.

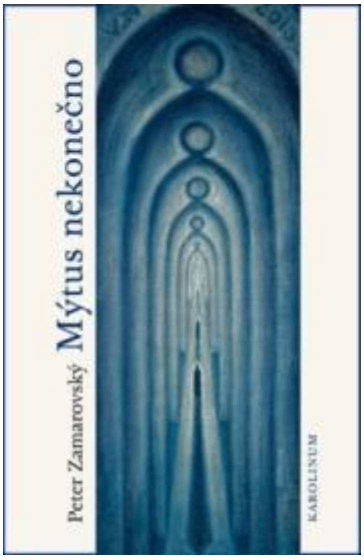
2	7	17
3	11	19
5	13	?

Číslo **10!** (desať faktoriál) je počet sekúnd za dva týždne.

Výber publikácií z rekreačno-zábavnej M
(hry, triky, hlavolamy)

ADLER, I.: *Čísel hra kouzelná*. Praha: Horizont, 1972.
CARROL, L.: *Logika hrou*. Praha: Pressfoto, 1971.
CVIK, P. a kol: *Program pre záujmový útvar matematiky*. Bratislava: SPN, 1985.
ČUPR, K.: *Aritmetické hry a zábavy*. Praha: JČMF, 1943.
ČUPR, K.: *Geometrické hry a zábavy*. Praha: JČMF, 1949.
DOBROVOLNÝ, B.: *Matematické rekreace*. Praha: Práce, 1961, 1969.
DOBROVOLNÝ, B.: *Nové matematické rekreace*. Praha: SNTL, 1967.
DUŠEK, F.: *Matematické záujmové krúžky*. Bratislava: SPN, 1973.
DYNKIN, J.B.: *Matematické hlavolamy*. Bratislava: Alfa, 1976, 1979.
GAHÉR, F.: *Logické hádanky, hlavolamy, paradoxy.* Bratislava: Iris, 1996.
GOGA, M.: *Vieš, uhádneš (hlavolamy)*. Bratislava: Videopress, 1992.
GOGA, M. - PINDA, Ľ.: *Úlohy pre bystré hlavy*. Bratislava: SPN, 1989.
GÖRKEOVÁ, L. a kol.: *Matematika zo všetkých strán*. Bratislava: Mladé letá, 1980.
GÖRKEOVÁ, L. a kol.: *Zajímavá matematika*. Praha: Albatros, 1983.
HONZÍKOVI, K. a M.: *Dobrodružství čísel*. Praha: Svoboda, 1970.
KORDEMSKIJ, B. N.: *Hry, triky, hlavolamy*. Bratislava: Obzor, 1967.
KOVAL, V.: *Kamaráti čísla*. Bratislava: SPN, 1969.
KOWAL, S.: *Matematika pro volné chvíle*. Praha: SNTL, 1975, 1985.
MALÁČ, J. - KURFÜRST, J.: *Zajímavé úlohy z učiva matematiky ZŠ.* Praha: SPN, 1981.
MOČALOV, L. P.: *Hlavolamy*. Praha: Mladá fronta, 1987.
NOVOVESKÝ, Š. a kol.: *Zábavná matematika*. Bratislava: SPN, 1975, 1977.
NOVOVESKÝ Š. a kol.: *777 matematických zábaviek a hračiek.* Bratislava: SPN, 1975.
NOWAK, Z.: *Kosmické hlavolam*y. Praha: SNTL, 1976.
PAPPASOVÁ, T.: *Potešenie z matematiky*. Bratislava: Vydavateľstvo Nebojsa, 1997.
PERELMAN, J. I.: *Zajímavá algebra*. Praha: SNTL, 1985.
PERELMAN, J. I.: *Zajímavá geometrie*. Praha: Mladá fronta, 1954.
PERELMAN, J. I.: *Živá matematika*. Bratislava: Alfa, 1969.
SMULLYAN, R.: *Šeherezádiny hádanky a další podivuhodné úlohy*. Praha: Portál, 2004.
STROUHAL, J.: *Hádej, hádej, hadači*. Praha: SNDK, 1966.
TELEPOVSKÝ, M.: *Matematické hlavolamy*. Nitra: Enigma, 1996.
VARGA, T.: *Hrajme sa s matematikou*. Bratislava: Mladé letá, 1981.
VEJMOLA, S.: *Konec záhady hlavolamů*. Praha: SPN, 1986.
WESLEY, R.: *Matematika pre každého*. Bratislava: Alfa, 1972.
ZAPLETAL, M.: *Kniha hlavolamů*. Praha: Albatros, 1983.
ZAPLETAL, M.: *Kniha hlavolamov* .Bratislava: Mladé letá, 1987.

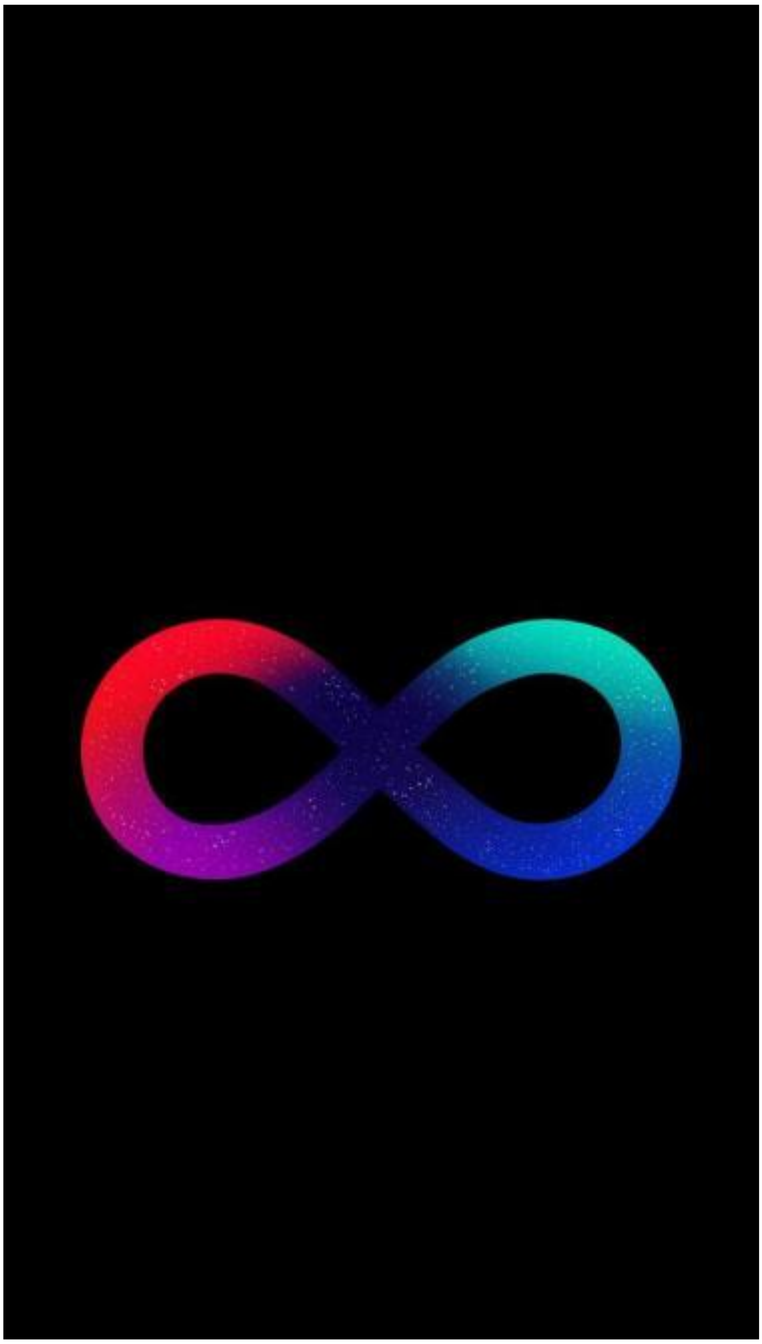
Nie som špecialista v matematike, som len jej obdivovateľ,
nešťastník zamilovaný do tejto najkrásnejšej z vied (P. Valéry).



https://www.youtube.com/watch?v=DYD4f2ngHBs

https://www.youtube.com/watch?v=dVh0-wuVQZs

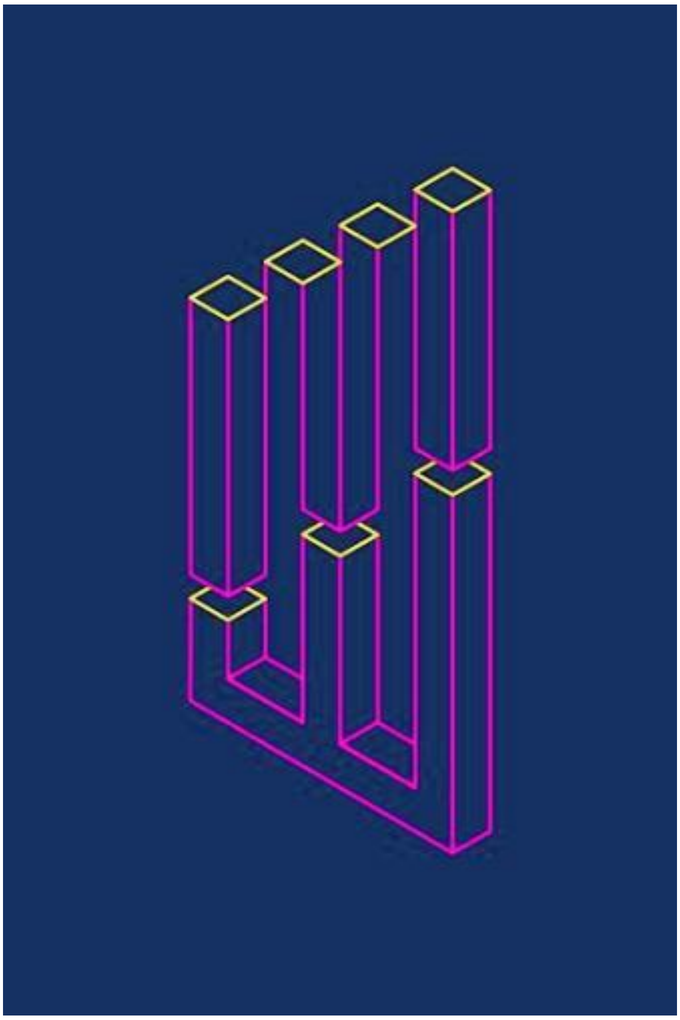
https://slideslive.com/38912107/mytus-nekonecna

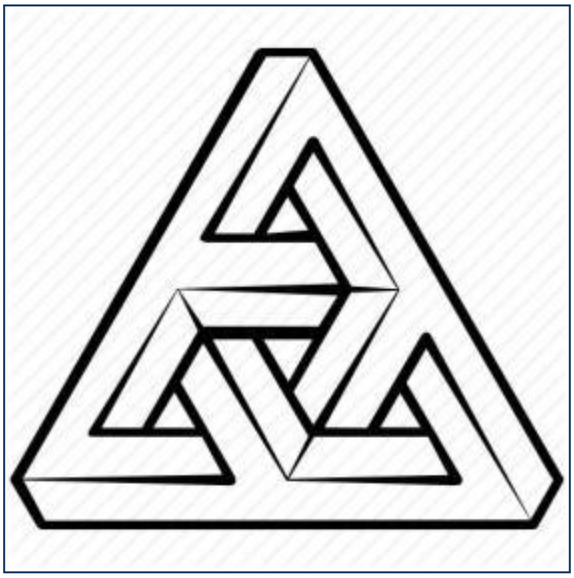


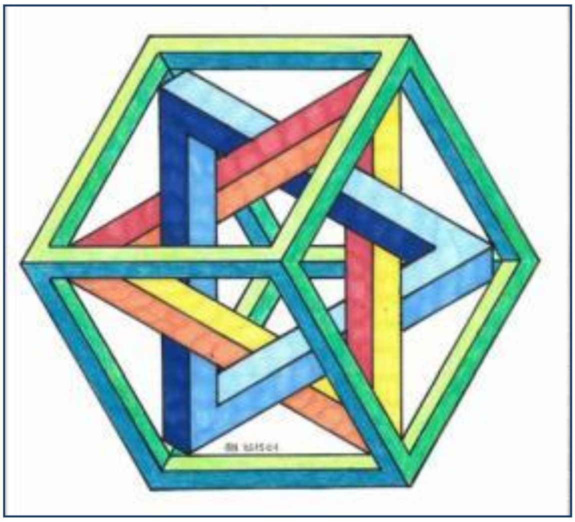
Pavol ZLATOŠ - Nekonečno v teológii, filozofii a matematike

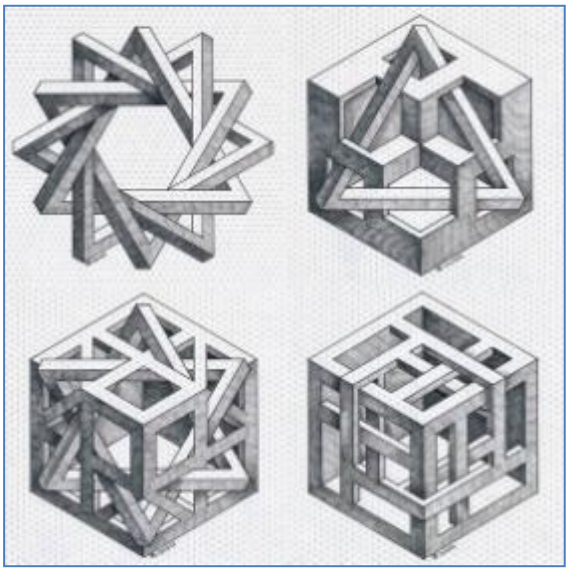
NEKONEČNO V TEOLÓGII, FILOZOFII A MATEMATIKE ... - GJH

https://www.youtube.com/watch?v=R6h3FoBC4L8









Nemôžete nikoho nič naučiť.
Môžete mu prinajlepšom pomôcť,
aby to sám v sebe našiel
(G. Galilei, 1564 – 1642).

Nevysloviteľný Tvorca!

Ty si z prameňa múdrosti svojej určil trojakú hierarchiu anjelov
a rozdelil si im spôsobom podivuhodným úlohy
vo svete neviditeľnom. Ty si svetadiely vesmíru krásne rozložil.
Veď Ty si spravodlivé žriedlo svetla a múdrosti
a základ každej vedomosti. Rozsvieť v šere rozumu môjho lúče svetla svojho
a odstráň odo mňa dvojakú tmu, v ktorej som sa narodil, hriech a nevedomosť.
Ty otváraš jazyky nemluvniat, vycvič aj môj jazyk a vlej na pery moje milosť požehnania svojho.
Daj, aby som ostro chápal, dobre si zapamätal a prakticky sa učil. Daj, aby som jasne vysvetľoval
a daj mi k tomu veľkú milosť reči. Prípravu napomáhaj, činnosť sprevádzaj a účinok doplňuj.
Ty si pravý Boh a pravý človek a žiješ a kraľuješ na veky vekov.
(T. AKVINSKÝ)

Nemoderné desatoro?

Život každého z nás skrýva v sebe protirečenie, aj novú pravdu, aj neopakovateľný zázrak. (W. Saroyan)

Človek je hlboko uschopnený potrebou milovať. (E. Fromm)

Ku šťastiu sa ide naokolo, cez druhých. (V. E. Frankl)

Nemôžeme konať veľké veci, iba malé veci s veľkou láskou. (Matka Terézia z Kalkaty)

Dobre, že je svet voči nám strohý, nechápavý, nevďačný a chladný. Aspoň sa osvedčíme. (P. Strauss)

Vedca z človeka nerobí samo vzdelanie, ale vytrvalé a neúnavné hľadanie pravdy. (K.R. Popper)

Prekvapujúca metafora je viac než zlatý prsteň na ruke. (J. Seifert)

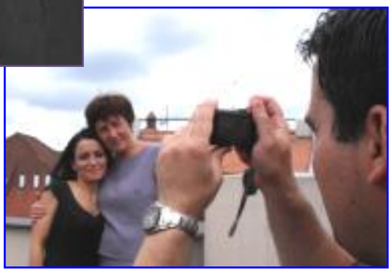
Človek sa musí rozhodnúť medzi absurditou a tajomstvom. (J. Guitton)

Boh je zmyslom sveta a svet je znamením Boha. (J. Lacroix)

Môžeme byť lepší, pretože nemáme právo žiadať si lepší svet,
keď nezačneme s polepšením vo vlastnom srdci. (K. Rahner)

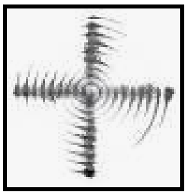
Svätý **Spiridion** (zodpovedá mu slovenské meno **Dušan**), biskup, 4. stor., patrí medzi významných svätcov východnej Cirkvi. Na jeho počesť vznikli viaceré životopisy, básne a oslavné reči. Hoci obsahujú veľa legendárneho, dá sa v nich určiť historické jadro. Tento svätec pochádzal zo stredomorského ostrova Cypru, kde žil v prvej polovici 4. storočia. Pôvodne bol **pastierom oviec a otcom rodiny**. Neskôr sa stal biskupom v meste Trimithont na Cypre. Nevedno, kedy sa ujal biskupskej funkcie. Nie je dôkaz, že by sa bol zúčastnil na Nicejskom koncile r. 325, ako niektorí predpokladajú. Osobne sa nezúčastnil ani na dôležitej synode v Sardike r. 343, ale dodatočne podpísal jej dokumenty (asi v r. 346). V tom čase teda bol ešte biskupom v Trimithonte. Zo zachovaných správ vyplýva, že **vynikal duchovnou hĺbkou, veľkorysosťou charakteru a dobročinnosťou.**

(ONDRUŠ, R.: *Blízki Bohu i ľuďom*. Dobrá kniha, Trnava. 1995)



Nedokázali bychom vůbec žít,
kdyby kromě atmosféry tohoto světa
nebylo možno dýchat ještě i jiný
vzduch, kdyby kromě času
neexistovala i věčnost.

Hermann Hesse

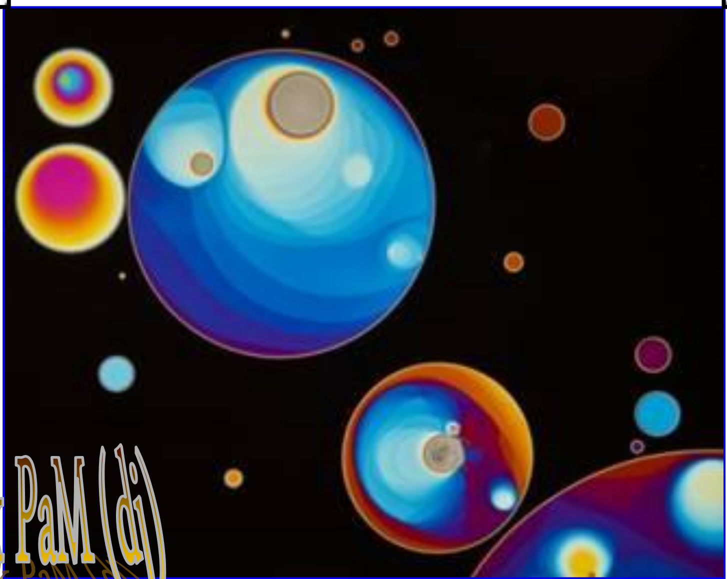


Mít rád i ztrácet...

Mít rád i ztrácet, toužiti i plakat,
bolestí padat, znovu klenout most,
vyhánět smutek i ho k sobě lákat,
hle, to je život: nic a přece dost…

Za jedním skvostem bloudit po strnisku
a hledat perlu, čelit náhodě.
jen aby po nás zůstali tu v písku
vyryté stopy, kruhy na vodě.

- Leopold STAFF



Bublifuk PaM (dj)