Dokážeme, že sa nedá

Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave

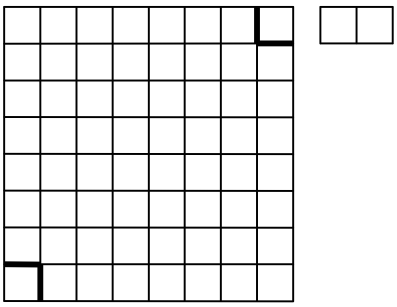
Význam sporu

Argumenty pre tvrdenie „nedá sa“ bývajú rôzne. Niektoré môžeme uznať už vo vyučovaní matematiky na základnej škole. Školská matematika nám ponúka aj také úlohy, v ktorých môžeme ukazovať, že uznanie predpokladu nejakého javu by viedlo k sporu – súčasnej platnosti nejakého tvrdenia aj jeho negácie. Logický spor ale znamená, že situácia pri ktorej k nemu dochádza nie je matematicky prijateľná, považujeme ju za nemožnú. Často je tvorivým umením to, ako logicky ukázať, že v skúmanej situácii by k sporu došlo. Riešenie nasledujúcich úloh ukazuje niektoré jednoduché príležitosti, ktoré máme pri uplatnení tvrdení o nemožnosti v školskej matematike.

Úloha č. 1 (Vystrihnutá šachovnica):

Ukážte, že ak zo šachovnice (8 x 8 štvorcových políčok) odstrihneme dve políčka v protiľahlých kútoch uhlopriečky, tak takúto „vystrihnutú“ šachovnicu nemožno úplne pokryť „dvojpolíčkovými obdĺžnikmi“.

Riešenie:



Ak si predstavíme aj striedanie farebných štvorčekov ako na šachovnici pre šachovú hru (striedavo biele a tmavé), uvidíme, že oba vystrihnuté štvorce majú rovnakú farbu. Na „vystrihnutej“ šachovnici je 32 štvorčekov jednej farby a len 30 štvorčekov druhej farby. Pokrývajúce „dvojpolíčkové obdĺžniky“ majú vždy jeden štvorček biely a jeden tmavý. Pri postupnom pokrývaní sa teda vždy pokryje obdĺžnik zložený z dvoch štvorčekov rôznych farieb! To znamená, že spomínaným postupom nemožno súčasne pokryť nerovnaký počet bielych a tmavých štvorčekov.

Úloha č. 2 (Nebudú naraz celé):

Ukážte a zdôvodnite, že obidva zlomky $\frac{(7n-1)}{4}$ a $\frac{(5n+3)}{12}$ nemajú zároveň kladnú celočíselnú hodnotu pre žiadne $n \in N$.

Riešenie:
Predpokladajme, nech sú spomínané zlomky pre niektoré $n \in N$ oba zároveň celé čísla:

$\frac{(7n-1)}{4} = p$ (1) a $\frac{(5n+3)}{12} = q$ (2), kde p, q sú celé kladné čísla.

To znamená, že z (1) vyplýva $n = \frac{4p+1}{7}$ a zároveň z (2) plynie $n = \frac{12q-3}{5}$.

Teda má byť

$$\frac{4p+1}{7} = \frac{12q-3}{5}$$

$$20p + 5 = 84q - 21$$

$$42q = 10p + 13,$$

ale to znamená, že ľavá strana rovnice je nenulové párne číslo a pravá strana nenulové nepárne číslo. Ich rovnosť to je zrejmý spor. Znamená to, že tvrdenie úlohy, ktoré je negáciou nášho predpokladu, je zdôvodnené i dokázané.

Úloha č. 3 (Nedá sa krátiť):
Dokážte, že pre každé dve prirodzené čísla a, b platí:
Ak sa zlomok $\frac{a-b}{a+b}$ nedá krátiť, tak sa nedá krátiť ani zlomok $\frac{a}{b}$.

Riešenie:
Treba dokázať implikáciu ($A \Rightarrow B$). Použijeme a dokážeme obmenenú implikáciu ($B' \Rightarrow A'$), ktorá je ekvivalentná s pôvodnou. Nech sa dá krátiť zlomok $\frac{a}{b}$. To znamená, že existuje $k \in N$ tak, že $a = k \,.\, b$ a potom platí $\frac{a-b}{a+b} = \frac{k.b-b}{kb+b} = \frac{b.(k-1)}{b.(k+1)}$, to však znamená, že zlomok $\frac{a-b}{a+b}$ sa dá tiež krátiť. Dokázali sme obmenenú implikáciu ($B' \Rightarrow A'$), teda platí aj ($A \Rightarrow B$).

Úloha č. 4 (Nemôže byť?):
Dokážte, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísiel nemôže byť druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Riešenie:
Súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísiel znamená:
$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4n^2 + 2n + 14 = 4.(n^2 + 3n + 3) + 2$, kde $n \in N$.

Pozrime sa „čo robia" druhé mocniny prirodzených čísiel:

$1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, …

ak je n párne, t.j. existuje také $k \in N$ tak, že $n = 2k$, potom $n^2 = 4k^2$,
teda každá druhá mocnina párneho čísla je deliteľná štyrmi.
Druhé mocniny nepárnych čísiel sú vždy nepárne, pretože

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 \quad .$$

Náš spomínaný súčet druhých mocnín štyroch za sebou idúcich prirodzených čísiel $4.(n^2 + 3n + 3) + 2$ je párny, teda ak by existovalo niektoré príslušné prirodzené číslo $p \in N$ tak, aby $4.(n^2 + 3n + 3) + 2 = p^2$, muselo by p tiež byť párne a to ale znamená, že p^2 musí byť deliteľné aj štyrmi. Ale náš súčet $4.(n^2 + 3n + 3) + 2$ nie je deliteľný štyrmi. Čiže také $p \in N$ neexistuje, aby pre $n \in N$ platilo

$$4.(n^2 + 3n + 3) + 2 = p^2$$

Dokázali sme, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísiel nemôže byť druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Úloha č. 5 (Nikdy sa to nestane):
Dokážte, že neexistuje také $n \in N$, pre ktoré by $n^2 + n + 1$ bolo druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Riešenie:
Nech také $n, p \in N$ existujú.
Potom by muselo platiť $n^2 + n + 1 = p^2$ a $p > n$,
teda aj $n+1 = p^2 - n^2$
$n+1 = (p - n) . (p + n)$

a) ak $p = 1$, tak $n + 1 = (1 - n). (1 + n)$
$1 - n = 1$
$n = 0$, teda nevyhovuje (0 nie je prirodzené číslo).

b) ak $p > 1$, tak $n + p > n + 1$ a preto $(p - n).(p + n) > n + 1$ (vieme, že $p > n$),
teda neplatí $n+1 = (p - n). (p + n)$.

Ukázali sme, že zvolený predpoklad existencie prirodzených čísiel s požadovanou vlastnosťou vedie vždy k sporu.
Neexistujú $p, n \in N$ *tak*, aby platilo $n^2 + n + 1 = p^2$.

Úloha č. 6 (Uznajte, že sa to nedá):
Dokážte, že žiadne číslo 2^n $(n \in N)$ sa nedá napísať ako súčet niekoľkých za sebou idúcich prirodzených čísiel.

Riešenie:
Predpokladajme, že sa 2^n $(n \in N)$ dá napísať ako súčet niekoľko za sebou idúcich prirodzených čísiel a ukážeme, že potom vznikne spor.

Nech teda $2^n = \underbrace{x + (x+1) + \ldots + (x + k - 1)}_{k \text{ za sebou idúcich prirodzených čísel } (k > 1)}$

Pretože vieme sčítať členy aritmetickej postupnosti [ako mladý Gauss; $(a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$]
tak

$$2^n = (x + x + k - 1) \cdot \frac{k}{2} \quad .$$

Na ľavej strane tejto rovnice je vždy súčin samých dvojok. Posúďme aj pravú stranu. Ak $k = 2p$ (t.j. k je párne číslo), tak pravá strana je $\underbrace{(2x + 2p - 1)}_{\text{nepárne číslo}} . \, p$

Ale ľavá strana je súčin samých párnych dvojok a na pravej strane je aj nepárny činiteľ. To sa nemôže nikdy rovnať.

Podobne, ak $k = 2p + 1$ (t.j. k je nepárne číslo), tak pravá strana má tvar

$$(2x + 2p) \cdot \frac{2p+1}{2} = (x + p) \cdot \underbrace{(2p + 1)}_{\text{nepárne číslo}}$$

Ale to by znamenalo, že súčin párnych dvojok sa rovná súčinu, v ktorom je nepárny činiteľ. To nie je možné - spor.

Pozoruhodnou úvahou sme sa presvedčili, že číslo 2^n sa pre žiadne $n \in N$ nedá napísať ako súčet niekoľkých za sebou idúcich prirodzených čísiel.

Účinný metodologický prvok

Didakticky vhodné používanie argumentov pre tvrdenie „nedá sa“ v školskej matematike je užitočnou propedeutikou aj pre metodológiu logického postupu v ďalších vedeckých disciplínach.