Úlohy školskej matematiky, ktorých riešenie mám rád

Dušan Jedinák, Trnavská univerzita v Trnave

Priznanie

Možno sa niekomu zdá, že všetko, aj v školskej matematike, má byť prísne objektívne, bez vzťahu ku konkrétnemu človeku, akési sterilné, suché. Ponúkam ukážky riešení školských matematických úloh, ktoré mi robia osobné potešenie, subjektívnu radosť. Teším sa, keď nimi môžem odhaľovať zaujímavý myšlienkový postup charakteristický pre matematickú argumentáciu. Takéto úlohy sú pre mňa už svojím zadaním živé, intelektuálne pôsobivé. Sú to príklady primeraných matematických úloh (povedzme pre stredoškolákov), ktoré učiteľ počtov a merby, môže vnímať ako ozdobu svojej pedagogicko-didaktickej činnosti.

Zaujímavá vlastnosť pytagorovských čísiel

Úloha: Dokážte, že platí: $\forall\, a, b, c \in N;\ a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 5/(a.\, b.\, c)$

Riešenie:

Predpokladajme, že platí negácia dokazovaného tvrdenia:
$\exists\, a, b, c \in N;\ a^2 + b^2 = c^2 \wedge$ 5 nedelí $(a.\, b.\, c)$.

Pre druhé mocniny prirodzených čísiel a ich deliteľnosť piatimi platí, že zvyšky po delení piatimi sú tieto:
$(5k)^2 = 25k^2 = 5\,.(5k^2) \Rightarrow$ zvyšok 0
$(5k + 1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 \Rightarrow$ zvyšok 1
$(5k + 2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 \Rightarrow$ zvyšok 4
$(5k + 3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 \Rightarrow$ zvyšok 4
$(5k + 4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 \Rightarrow$ zvyšok 1

Je zrejmé, že každá druhá mocnina prirodzeného čísla dáva pri delení piatimi zvyšok $0 \vee 1 \vee 4$.

Ak 5 nedelí $(a\,.b.\,c) \Rightarrow$ 5 nedelí $a \wedge$ 5 nedelí $b \wedge$ 5 nedelí c , teda a, b, c sú tvaru buď $5k + 1$ alebo $5k + 2$ alebo $5k + 3$ alebo $5k + 4$ a po umocnení $/^2$ majú vždy zvyšok $1 \vee 4$.

Potom $a^2 + b^2$ môže mať zvyšky $5 \vee 8 \vee 2$, t.j. $a^2 + b^2$ môže mať po vydelení piatimi zvyšky $0 \vee 3 \vee 2$, c^2 môže mať zvyšok $1 \vee 4$.

Teda vždy $a^2 + b^2 \neq c^2$, ale to je spor s predpokladom. Naša predpokladaná negácia dokazovaného výroku neplatí, tak platí výrok pôvodný, ktorý sme mali dokázať.

Zmena na priamy dôkaz:
Nech pre $a, b, c \in N$ platí $a^2 + b^2 = c^2$, teda na každej strane rovnosti musí byť rovnaký zvyšok voči deliteľnosti 5 (možné sú len 0, 1, 4), to znamená jednotlivé zvyšky, ktoré vyhovujú sú:

$$\left.\begin{array}{l} \text{buď } \ 1 + 4 = 0 \Rightarrow 5/c \\ \text{alebo } \ 4 + 1 = 0 \Rightarrow 5/c \\ \text{alebo } \ 0 + 0 = 0 \Rightarrow 5/a \wedge 5/b \wedge 5/c \\ \text{alebo } \ 0 + 1 = 1 \Rightarrow 5/a \\ \text{alebo } \ 1 + 0 = 1 \Rightarrow 5/b \\ \text{alebo } \ 0 + 4 = 4 \Rightarrow 5/a \\ \text{alebo } \ 4 + 0 = 4 \Rightarrow 5/b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 5/(a.\, b.\, c)$$

Prirodzené čísla a, b, c, ktoré vyhovujú vzťahu $a^2 + b^2 = c^2$, voláme ***pytagorovské*** trojice čísiel.

Možnosti pre milión

Úloha: Koľko usporiadaných trojíc prirodzených čísel x, y, z vyhovuje vzťahu

$$x.\, y.\, z = 10^6 \ ?$$

Riešenie:
10^6 môžeme rozložiť na súčin prvočísiel: $10^6 = 2^6 \,.\, 5^6$.
Hľadaný rozklad $x \,.\, y \,.\, z = 10^6$ môžeme „vidieť“ takto:

$$(2^a \,.\, 5^p) \,.\, (2^b \,.\, 5^q) \,.\, (2^c \,.\, 5^r) = 2^6 \,.\, 5^6$$

t.j. $x = 2^a \,.\, 5^p$, $y = 2^b \,.\, 5^q$, $z = 2^c \,.\, 5^r$ tak, aby $a + b + c = 6$
a tiež $p + q + r = 6$, kde a, b, c, p, q, r sú nezáporné celé čísla.

Koľko je možností pre $a + b + c = 6$, ak $a, b, c \in \{0, 1 \,....6\}$?

$$\left.\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 6 & \mathbf{3} \\ 0 & 1 & 5 & \mathbf{6} \\ 0 & 2 & 4 & \mathbf{6} \\ 0 & 3 & 3 & \mathbf{3} \\ 1 & 2 & 3 & \mathbf{6} \\ 1 & 1 & 4 & \mathbf{3} \\ 2 & 2 & 2 & \mathbf{1} \end{array}\right\} \ 28$$

Ak sme si to systematicky rozpísali, dostaneme 28 možností
(alebo kombinatoricky pri predstave: $1\ \ 1\ \underset{\triangle}{}\ 1\ \ 1\ \ 1\ \underset{\triangle}{}\ 1$ $\quad C_2(8) = P'_{2,\,6}\,(8) = 28$).

Taký istý počet je aj pre $p + q + r = 6$.

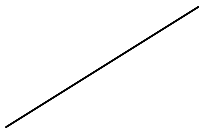
Pretože ku každej trojici $[a, b, c]$ existuje iný výber $[p, q, r]$, je počet všetkých možností pre x, y, z rovný $28 \,.\, 28 = 784$.

Predstava, odvodenie, dôkaz

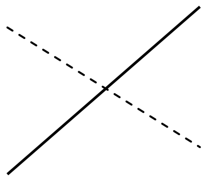
Úloha: Na aký počet častí rozdelí n vzájomne rôznobežných priamok, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným bodom, danú rovinu? Odôvodnite a dokážte tento vzťah.

Riešenie:
A. Predstavme si problematiku postupne {n je počet priamok, $p(n)$ je počet častí roviny}

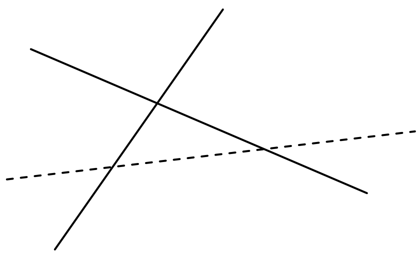
$n = 1$ $\qquad$ $p(1) = 2$



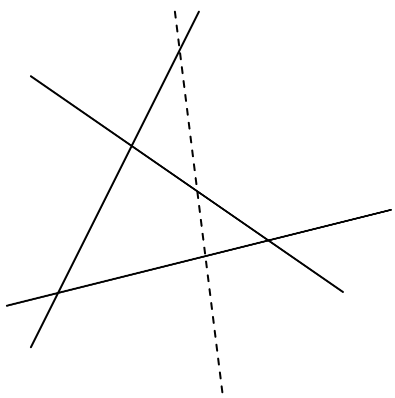
$n = 2$ $\qquad$ $p(2) = 4$



$n = 3$ $\qquad$ $p(3) = 4 + 3 = 7$



$n = 4$ $\qquad$ $p(4) = p(3) + 4$



k pôvodným siedmim častiam pribudli 4 nové, nová priamka bola pôvodnými tromi priamkami rozdelená na 4 časti a každá prispela k ďalšiemu „rozpoleniu“

.

.

.

n $\qquad$ $p(n) = p(n-1) + n$,

pretože pridaním n - tej priamky k (n - 1) pôvodných priamok, sa n - tá priamka rozdelí n - 1 priesečníkmi s pôvodnými priamkami na n častí a každá z nich prispeje k „rozpoleniu“, teda k pôvodnému počtu častí $p(n - 1)$ sa pridáva n nových častí.

Ak sčítame

$$\left.\begin{array}{l} p(1) = 2 = 1 + 1 \\ p(2) = p(1) + 2 \\ p(3) = p(2) + 3 \\ . \\ . \\ . \\ p(n) = p(n-1) + n \end{array}\right\} +$$

dostaneme

$$p(1) + p(2) + \ldots\ldots\ p(n) = 1 + p(1) + \ldots\ldots\ldots\ p(n-1) + (n+1).\ n/2$$

$$p(n) = \frac{n^2 + n}{2} + 1$$

$$p(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

B. Dôkaz matematickou indukciou:

1. pre $n = 1$ je $p(1) = 2$, vzťah platí
2. nech vzťah platí pre $n = k$, t.j.

$$p(k) = \frac{k^2 + k + 2}{2}$$

pre $p(k+1) = p(k) + (k+1)$ odvodíme

$$p(k+1) = \frac{k^2 + k + 2}{2} + k + 1 = \frac{k^2 + k + 2 + 2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 4}{2} = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$$

$$p(k+1) = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$$

teda vzťah platí aj pre $n = k + 1$. Záver: pre každé $n \in \mathrm{N}$ platí

$$p(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

Vhodnou úvahou sme odvodili a dôkazom sme sa presvedčili, že n priamok, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným bodom, rozdelí danú rovinu na $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ častí.

Jablká pre deti

Úloha: Koľko je rôznych možností pre rozdelenie 8 jabĺk trom deťom, ak záleží len na počte jabĺk pre jednotlivé deti?

Riešenie:
A. rozpíšme systematicky jednotlivé možnosti pre jednotlivé deti A, B, C :

	A	B	C	
počet	0	0 – 8	čo zostane	9 možností
	1	1 – 7	čo zostane	8 možností
	2	2 – 6	čo zostane	7 možností
	.	.		.
	.	.		.
	.	.		.
	8	0	0	1 možnosť

sčítaním všetkých možností dostávame počet 45.

B. Ak si označíme každé jablko menom dieťaťa, ktorému ho chceme dať, tak dostaneme napr. A A B B C C C C, teda jednotlivé kombinácie ôsmej triedy z troch prvkov s opakovaním. Ich počet je $C_8'(3) = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$.

C. Osem jabĺk môžeme oddeliť dvomi značkami na tri skupiny (pre A, B, C), napr. Ỏ Ỏ Δ Ỏ Ỏ Δ Ỏ Ỏ Ỏ Ỏ , takých možností je toľko, ako rozmiestniť dve značky na 10 polí, t.j. $C_2(10) = 45$.

D. Predchádzajúci počet možností môžeme určiť aj ako počet možností rozdeliť dva druhy prvkov s počtom 8 a 2 do 10 políčok, t.j. ako počet permutácií 10 prvkov s opakovaním z dvoch druhov s počtom 8 a 2 prvky: $P'_{8,2}(10) = 45$.

Riešenie úlohy nám umožnilo použiť poznatky o kombináciách bez opakovania i s opakovaním prvkov, aj vzťah pre počet permutácií s opakovaním prvkov.

Roky plynú, vážení ...

Úloha: V ktorom roku devätnásteho storočia sa narodil nemenovaný matematik, ak v roku 1901 bol súčet cifier roku jeho narodenia rovnaký ako súčet cifier počtu dovtedy prežitých rokov ?

Riešenie:
Zamyslime sa, začnime uvažovať a zapisovať:
Narodil sa v roku 18*xy*, (*x*, *y* sú cifry, prirodzené čísla od *0* do *9*) .
V roku 1901 mal (1901 – 18*xy*) rokov.
Ak by $y > 1$, odčítaním rokov

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 9 & 0 & 1 \\ - & 1 & 8 & x & y \\ \hline & & & (9-x) & (11-y) \end{array}$$

(prechod cez desiatku)

dostaneme cifry jeho veku (9-x) a (11-y).

Potom by podľa zadania úlohy malo platiť $1 + 8 + x + y = (9\text{-}x) + (11\text{-}y)$, teda $x + y = 5{,}5$. Také prirodzené čísla x, y zrejme neexistujú.

Ak by $y \leq 1$ (t.j. buď *0* alebo *1*) po odčítaní rokov

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 9 & 0 & 1 \\ - & 1 & 8 & x & y \\ \hline & & & (10\text{-}x) & (1\text{-}y) \end{array}$$

(nie je prechod cez desiatku)

dostaneme cifry veku (10-x) a (1-y).

Potom má platiť $1 + 8 + x + y = (10 - x) + (1 - y)$, teda $x + y = 1$.
Ak bude $y = 1$, musí byť $x = 0$. No vtedy by bolo 1901 – 1801 = 100, ale súčet cifier roku narodenia je 10 a súčet cifier veku iba 1.
To nevyhovuje zadaniu úlohy.

Ešte je možnosť $y = 0$. Vtedy musí byť $x = 1$. Potom rok narodenia by bol 1810 a vek (v roku 1901) je 91 rokov, to vyhovuje (1+8+1+0=10, 9+1=10).
Nemenovaný matematik sa narodil v roku 1810.

Želajme si príjemne a zmysluplne prežité roky budúce.

Vyznanie

Verím, že skoro každý zodpovedný učiteľ matematiky má svojmu srdcu milé zadania úloh, pri ktorých riešení vybadajú jeho žiaci, že má zvlášť rád nielen niektoré postupy školskej matematiky, ale aj svojich žiakov. Pre seba i pre nich citujem: *Nie som špecialista v matematike, som len jej obdivovateľ, nešťastník zamilovaný do tejto najkrásnejšej z vied* (P. Valéry).

Odporúčaná literatúra:

CIRJAK, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh*. Prešov: Essox, 2000.
GREGOROVÁ, G.: *Zbierka riešených úloh z planimetrie*. Bratislava, Práca 2000.
KONFOROVIČ, A.G.: *Významné matematické úlohy*. Praha: SPN, 1989.
KOPKA, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice.* Ústí nad Labem: Acta UP, 1999.
KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN, 1990.
REPÁŠ, V. a kol.: *Úlohy z matematických olympiád základnej školy*. Bratislava, SPN 1989.
THIELE, R.: *Matematické důkazy*. Praha: SNTL, 1985.
ZHOUF, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky*. Praha: Prometheus, 1997.