Školské úlohy riešené matematickým prieskumom

Úvod

Jednou z metód riešenia školských matematických úloh je skúmať, ako sa prípadné riešenie správa k jednotlivým zmenám premenných či parametrov, ako sa postupne vyvíja príslušná zákonitosť. Takýto postup nazývame experimentovanie, modelovanie skúmanej situácie, objavný prieskum. Pri simuláciách môžeme vysloviť určitú hypotézu a potom sa snažiť ju dokázať alebo vyvrátiť. Ponúkam niektoré úlohy, ktoré naznačujú spomínaný postup riešenia.

Prehľadné modelovanie problému

Zadanie: Pre ktoré prirodzené čísla n je číslo $G = (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ deliteľné piatimi?

Riešenie:

Vyznačme si ako sa G vytvára pre jednotlivé $n \in N$:

	$\mathbf{1^n}$	+	$\mathbf{2^n}$	+	$\mathbf{3^n}$	+	$\mathbf{4^n}$	$\boldsymbol{G}$
$n = 1$	1		2		3		4	10
$n = 2$	1		4		9		16	30
$n = 3$	1		8		27		64	100
$n = 4$	1		16		81		156	254
$n = 5$	1		32		243		624	900
$n = 6$	1		64		729		2496	3290

:

Ak si uvedomíme, že v číslach tvaru
2^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 2, 4, 8, 6;
3^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 3, 9, 7, 1;
4^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 4, 6, 4, 6;
uznáme, že na poslednom mieste súčtu $(1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ pre n = 1, 2, 3 ; 5, 6, 7; 9, 10, 11; ... (vynechávali sme násobky štyroch) je vždy 0 a to znamená že číslo G je deliteľné piatimi.
Pre n = 4, 8, 12, 16, ... sa tak nestane (na konci čísla G bude vždy cifra 4).
To znamená, že číslo $G = (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ je deliteľné piatimi pre všetky prirodzené čísla n, ktoré nie sú deliteľné štyrmi.

Úloha, ktorú ponúkol J.J. Sylvester

Zadanie: *Z dostatočne veľkého počtu poštových známok s hodnotami 5 a 17 sa dajú skladať rôzne hodnoty. Aká je* ***najväčšia*** *hodnota, ktorá* ***sa nedá*** *vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt?*

Riešenie:

Generujme systematickú tabuľku hodnôt, ktoré dostávame postupným sčítavaním jednotlivých hodnôt:

	5	10	15	20	25	...
17	22	27	32	37	42	...
34	39	44	49	44	49	...
51	56	61	66	71	76	...
68	73	78	83	88	93	...

:

Vidíme, že vieme vytvoriť číselné hodnoty
na konci s číslicou 0 pre čísla ≥ 10;
na konci s číslicou 5 pre čísla ≥ 5;
na konci s číslicou 7 pre čísla ≥ 17;
na konci s číslicou 2 pre čísla ≥ 22;

na konci s číslicou 4 pre čísla $\geq$ 34;
na konci s číslicou 9 pre čísla $\geq$ 39;
na konci s číslicou 1 pre čísla $\geq$ 51;
na konci s číslicou 6 pre čísla $\geq$ 56;
na konci s číslicou 8 pre čísla $\geq$ 68;
na konci s číslicou 3 pre čísla $\geq$ 73;

teda najväčšou hodnotou, ktorá sa nedá z daných hodnôt vytvoriť je 63.

Pohyblivá logika

Zadanie: Ak v štvorcovej tabuľke prirodzených čísiel 1 – 49 (pozri schému)

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

vyberieme sedem čísiel tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je vybrané práve jedno číslo, potom súčet vybraných čísiel je vždy rovnaký.
Dokážte toto tvrdenie a stanovte ten súčet.
Riešenie:
Predstavme si, že na každé číslo v prvom riadku tabuľky položíme značky. Súčet označených čísiel by bol 1 + 2 + 3 + 4 +5 + 6 + 7 = 28, ale treba, aby práve jedna značka bola v každom riadku i v každom stĺpci. To dosiahneme tak, že značky posúvame v smere stĺpcov, aby v každom riadku bola práve jedna. Pri posune značky do 2. riadku sa číslo zväčší o 7, pri presune do 3. riadku o 14 atď. Preto pri presune značiek do jednotlivých riadkov (do každého práve jedna) sa súčet príslušných čísiel zväčší o (1 + 2 + 3 +4 + 5 + 6) · 7 = 147. V požadovanom rozdelení, podľa textu úlohy, je teda celkový súčet označených čísel vždy 28 + 147 = 75. Logická predstava o pohybe značiek bola užitočná a presvedčivá.

Nielen radosť z experimentovania

Zadanie: Pre ktoré $n \in N$ je $1! + 2! + 3! + 4! + ... + n! = p^2$, kde p je prirodzené číslo.
Riešenie:
Kto skúsi postupne dosadzovať, vybadá:

$$1! = 1 = 1^2$$

$$1! + 2! = 3$$

$$1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$$

$$1! + 2! + 3! + 4! = 33$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! = 873$$

Zadaniu vyhovujú zatiaľ iba $n = 1$, $n = 3$.
Zdá sa, že od $n = 4$ je posledná číslica tých jednotlivých súčtov vždy 3. Prečo?
Pre $k \geq 5$ už všetky $k!$ majú poslednú číslicu vždy nula (je tam vždy súčin $2 \cdot 5$).
Ale druhá mocnina žiadneho prirodzeného čísla nikdy nekončí číslicou 3 (pretože $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ atď.). Danej úlohe vyhovujú len čísla 1 a 3.
Experimentovanie často ponúkne hypotézu, ktorú keď dokážeme, riešenie úlohy je zaručené.

Záverečné odporúčanie

Ponúkam prehľad niektorých publikácii, ktoré obsahujú podobné úlohy (aj s náznakmi riešenia a príslušnými výsledkami) na využitie prieskumných postupov pre riešenie školských matematických úloh:

CALDA, E.: *Sbírka řešených úloh.* Praha: Prometheus, 2006.
CIRJAK, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh*. Prešov: Essox, 2000.
GREGOROVÁ, G.: *Zbierka riešených úloh z planimetrie*. Bratislava: Práca, 2000.
HECHT, T. – SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*. Bratislava: SPN, 1992.
HRIŇÁK, M.: *Metódy riešenie matematických úloh 1 – 3*. Bratislava: MPC, 2008.
KOPKA, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad L.: UJEP, 1999.
KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN, 1990.
KUŘINA, F. a kol.: *Matematika a porozumění světu.* Praha: Academia, 2009.
KUŘINA, F. – PŮLPÁN, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia, 2006.
MIHALÍKOVÁ, B. a kol.: *Úlohy MO základnej školy*. Bratislava: IUVENTA, 2003.
NIEDERMAN, D.: *101 hádanek pro náročné*. Praha: Portál, 2006.
ODVÁRKO, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990.
STEWART, I.: *Kabinet matematických kuriozit.* Praha: Dokořán/Argo, 2013.
STEWART, I.: *Truhlice matematických podkladů.* Praha: Dokořán/Argo, 2013.
VRÁBEL, P.: *Heuristika a metodológia matematiky.* Nitra: UKF FPV, 2005.
ZHOUF, J. a kol.: *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů.* Praha: Prometheus, 2006.
ZHOUF, J.: *Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku.* Praha: UK Ped. fak., 2007.
ZHOUF, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky.* Praha, Prometheus, 1997.

Dušan Jedinák