Úlohy pre tvorivosť v školskej matematike

Dušan JEDINÁK

Niet dôležitejšej pedagogickej podmienky pre školské vyučovanie matematiky ako vzbudenie hlbokého záujmu, vnútornej motivácie a vhodných odpovedí na základnú otázku – prečo? Pre pochopenie podstaty matematiky je nenahraditeľné poznanie ako vzniká a sa upevňuje proces ľudského myslenia pri riešení rôznorodých problémov a v systémovej orientácii v logických a kvantifikovaných situáciách. Každá matematická téma vo vyučovaní matematiky požaduje aj znalosti vývoja (ontogenézy i fylogenézy) študovaných myšlienok. *Dobre vyučovať matematiku môže iba človek, ktorý je sám ňou nadšený a chápe ju ako živú, rozvíjajúcu sa vedu*. Tak vnímal základné predpoklady pre šírenie matematickej kultúry ruský matematik A. N. Kolmogorov (1903–1987). Aj on uznával, že iba myslením sa učíme myslieť. Vyučovací proces pri štúdiu matematiky má byť kultiváciou myslenia, argumentácie, definovania, odvodzovania a dokazovania. Pedagogicky dobre prepracovaný didaktický systém otázok, úloh a problémov má naznačovať objavné myšlienkové postupy, ponúkať nové pohľady a smery riešenia. Pri tom je potrebné podnecovať individuálny štýl myslenia a jeho spontánnosť, kritickú argumentáciu, vhodný obsah požadovaných vedomostí. Už systematicky koncipované štúdium školskej matematiky môže vytvárať hlboký intelektuálny zážitok primeraný mentálnym schopnostiam a rozumovým skúsenostiam s ohľadom na vek i kultúrne prostredie študentov. Významný fyzik a skvelý vysokoškolský učiteľ Richard P. Feynman (1918–1988) charakterizoval podstatné okolnosti podnecovania tvorivosti v školskom vyučovaní matematiky myšlienkou: *Problém výučby možno vyriešiť len vtedy, keď si uvedomíme, že najlepšie vyučovanie je také, v ktorom existuje priamy, osobný vzťah medzi študentom a dobrým učiteľom – vtedy študent posudzuje názory, rozmýšľa o veciach, diskutuje o problémoch*. Uznávaný didaktik matematiky G. Polya (1887–1985) často odporúčal: *Motivovať nie vynútením, askézou, ale zaujatím a podaním problému zvnútra*. Rád som opakoval budúcim učiteľom matematiky pre základné i stredné školy: *Najlepší spôsob ako vyučovať druhých, je presvedčiť študentov, aby sa pýtali a tvorili. Nerobte im kázeň – povzbuďte ich k činnosti* (P. R. Halmos, 1916–2006).

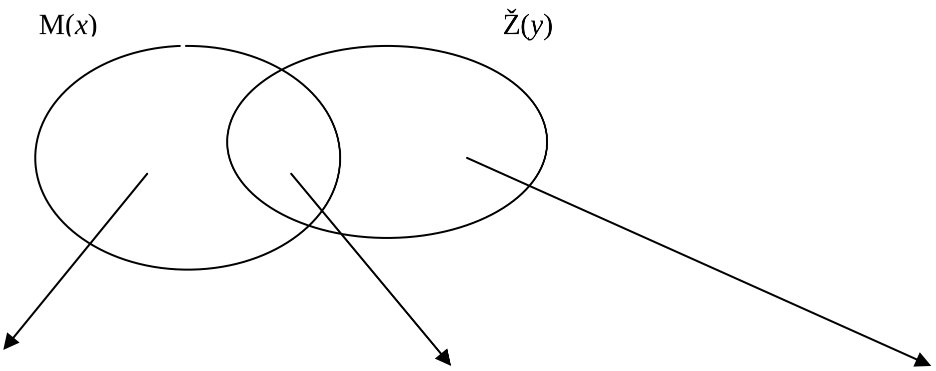
Uvádzam niektoré podnetné úlohy aj s naznačením riešenia alebo len s ponúkanými výsledkami z testových zadaní pre spomínaný zámer vo vyučovaní školskej matematiky .

Slobodní obyvatelia mesta

V našom meste sú $\frac{3}{5}$ žien vydatých za $\frac{2}{3}$ mužov. Aká časť mešťanov (obyvateľov mesta) je slobodná (nežije v manželstve)?

Riešenie:

Označme si počty mužov a žien písmenami x, y a vyznačme si diagramom situáciu:



$\frac{1}{3}\cdot x$ — počet slobodných mužov

$\frac{2}{3}\cdot x = \frac{3}{5}\cdot y$ — počet vydatých (ženatých)

$\frac{2}{5}\cdot y$ — počet slobodných žien

Nech m je celkový počet mešťanov, sú to buď muži alebo ženy: $m = x + y$.

Pretože $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{3}{5} \cdot y$, tak $10 \cdot x = 9 \cdot y$, teda $x = \frac{9}{10} y$ alebo $y = \frac{10}{9} x$.

Môžeme vyjadriť $m = \frac{9}{10} y + y \Rightarrow y = \frac{10}{19} .m$, alebo $m = x + \frac{10}{9} x \Rightarrow x = \frac{9}{19} .m$.

Potom slobodných je $\frac{1}{3} x + \frac{2}{5} y = \frac{1}{3} \frac{9}{19} m + \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{19} m = \frac{7}{19} m$.

Počet slobodných mužov je $\frac{3}{19}$, počet slobodných žien $\frac{4}{19}$, počet vydatých žien $\frac{6}{19}$ a počet ženatých mužov je tiež $\frac{6}{19}$ z celkového počtu obyvateľov mesta.

Počet slobodných je $\frac{7}{19}$ z celkového počtu obyvateľov mesta.

Zradné percento

Akú časť zmiešaného lesa chcú lesníci vyrúbať, ak ich vedúci nevinne vyhlásil: *Budeme rúbať iba sosny, ktorých je v našom zmiešanom lese 99 %. Po výrube budú sosny tvoriť 98 % všetkých ponechaných stromov.*

Riešenie: Označme počet všetkých stromov pred výrubom x. Počet sosien je teda $0{,}99 \cdot x$ a počet všetkých ostatných stromov je $0{,}01 \cdot x$; po výrube m stromov (sosien) bude počet sosien $0{,}98 \cdot (x - m)$ a počet ostatných $0{,}02 \cdot (x - m)$. Chceme poznať pomer m/x. Pretože sa majú vytínať iba sosny, počet iných stromov sa nezmení: $0{,}01 \cdot x = 0{,}02 \cdot (x - m)$, teda $0{,}02 \cdot m = 0{,}01 \cdot x$ a to znamená, že pomer $m/x = (0{,}01/0{,}02) = 1/2$. Lesníci chcú vyrúbať polovicu lesa!

Prehľadné modelovanie problému

Pre ktoré prirodzené čísla n je číslo $G = (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ deliteľné piatimi?

Riešenie:

Vyznačme si ako sa G vytvára pre jednotlivé $n \in N$:

	1^n	+	2^n	+	3^n	+	4^n	G
$n = 1$	1		2		3		4	10
$n = 2$	1		4		9		16	30
$n = 3$	1		8		27		64	100
$n = 4$	1		16		81		156	254
$n = 5$	1		32		243		624	900
$n = 6$	1		64		729		2496	3290

.
.
.

Ak si uvedomíme, že v číslach tvaru

2^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 2, 4, 8, 6;

3^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 3, 9, 7, 1;

4^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 4, 6, 4, 6;

uznáme, že na poslednom mieste súčtu $(1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ pre n = 1, 2, 3 ; 5, 6, 7; 9, 10, 11; ... (vynechávali sme násobky štyroch) je vždy 0 a to znamená že číslo G je deliteľné piatimi.

Pre n = 4, 8, 12, 16, ... sa tak nestane (na konci čísla G bude vždy cifra 4).

To znamená, že číslo $G = (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ je deliteľné piatimi pre všetky prirodzené čísla n, ktoré nie sú deliteľné štyrmi.

Študenti a učitelia

Koľko je možností pridelenia štyroch študentov na preskúšanie trom učiteľom, ak požadujeme:

a) aby každý študent bol preskúšaný **aspoň jedným** učiteľom;

b) aby každý študent bol preskúšaný **práve jedným** učiteľom;

c) aby každý učiteľ preskúšal **aspoň jedného** študenta;

d) aby každý učiteľ preskúšal **práve jedného** študenta.

Riešenie:

Označme si študentov **A**, **B**, **C**, **D** a učiteľov **P**, **Q**, **R**. Potom

a) študenta **A** môže preskúšať **P**, **Q**, **R**, **PQ**, **PR**, **QR**, **PQR**, teda to je 7 možností;

pre študenta **B** je to tiež týchto 7 možností, podobne aj pre **C** i **D**. Tieto javy sú

pre každého z nich nezávislé, tak všetkých možností spolu je 7^4 = **2401**.

b) naznačme jednotlivé možnosti pre každého študenta do tabuľky:

A	B	C	D
P	P	Q	R
R	R	R	R
Q	R	P	P
.			
.			
.			

v jednotlivých riadkoch sú variácie štvrtej triedy (štyria študenti) z troch prvkov (traja učitelia) s opakovaním. Ich počet je $V'_4(3) = 3^4$ = **81**.

c) učiteľ **P** môže preskúšať **A**, **B**, **C**, D, **AB**, **AC**, **AD**, **BC**, **BD**, **CD**, **ABC**, **ABD**,

ACD, **BCD**, **ABCD**, teda 15 možností. Podobne 15 možnosti je pre **Q** aj pre **R**.

Tieto javy sú pre každého z nich nezávislé a tak spolu je možnosti 15^3 = **3375**.

d) rozpíšme jednotlivé možnosti pre každého učiteľa do tabuľky:

P	Q	R
A	A	A
A	B	B
B	B	A
B	C	D
D	C	B
D	D	D
.		
.		
.		

to sú variácie tretej triedy (traja učitelia) zo štyroch prvkov (štyria študenti) s opakovaním a ich počet je $V_3'(4) = 4^3 =$ **64**.

Rok narodenia

V roku 2007 súčet prvého dvojčíslia a posledného dvojčíslia roku môjho narodenia vyjadril môj vek. V ktorom roku 20. storočia som sa narodil?

Riešenie: Zapíšme popisovaný stav (podčiarknuté písmená chápeme ako cifry; $p, q, x, y \in Z_0^+$):

$2007 - 19\underline{pq} = \underline{xy}$, to znamená:

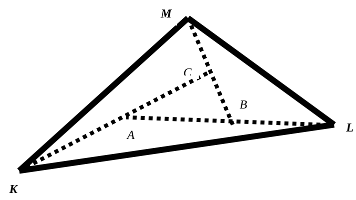
1. ak nebude prechod cez desiatku medzi poslednými ciframi, tak $10 - p = \mathbf{x}$ a $7 - q = \mathbf{y}$, teda podľa zadania úlohy má platiť: (môj vek $\underline{xy}$) $10\cdot(10 - p) + 7 - q = 19 + 10p + q$ (súčet prvého dvojčísla a posledného dvojčísla roku môjho narodenia). Potom po algebrickej úprave platí $100 - 10p + 7 - q = 19 + 10p + q \Rightarrow 107 - 19 = 20p + 2q \Rightarrow 10p + q = 44$, tomu vyhovuje pre kladné celé p, q z $\{0, 1, 2, ..., 8, 9\}$ iba $p = 4$ a $q = 4$, teda $\mathbf{x} = 6$ a $\mathbf{y} = 3$.

2. ak by bol prechod cez desiatku medzi poslednými ciframi, tak by malo platiť $10 - (p + 1) = x$ a $17 - q = y$. Potom zo zadania úlohy $10\cdot(10-p-1)+17-q = 19+10p+q$. Teda po algebrickej úprave platí $100 - 10p - 10 + 17 - q = 19 + 10p + q \Rightarrow 107 - 19 = 20p + 2q \Rightarrow 10p + q = 44$, tomu vyhovuje pre kladné celé p, q z $\{0, 1, 2, ..., 8, 9\}$ iba $p = 4$ a $q = 4$, ale neplatí $17 - q = y$, lebo $17 - 4 =$ **13** a to nie je jednociferné celé kladné číslo. Predpoklad prechodu cez desiatku nevyhovuje.

Zadaniu úlohy vyhovuje 2007 – 1944 = **63**, 19 + **44** = **63**. Narodil som sa v roku **1944**.

Z testu pre ZŠ

1. Staršie ručičkové hodinky sa oneskorujú o tri minúty za hodinu. Nastavil som si na nich presný čas. Kedy najskôr ukážu zase presný čas?
   a) za 20 hod. b) za 10 dní c) za týždeň d) nikdy
2. Digitálne hodinky ukazujú čas 19:57:33. Za koľko sekúnd sa prvý raz zmenia všetky číslice?
   a) 27 b) 60 c) 147 d) 180
3. Tento rok sa počet súťažiacich zvýšil oproti minulému roku o 32 %. Vlani sa zúčastnilo 55 % dievčat, tento rok iba 50 % dievčat. To znamená, že sa tento rok počet dievčat oproti minulému roku:
   a) znížil o 5 % b) zvýšil o 11 % c) zvýšil o 20 % d) nezmenil
4. Koľkokrát použijeme číslicu 5, ak napíšeme všetky prirodzené čísla od 1 do 1000?
   a) 100 b) 110 c) 300 d) 331
5. Ak predĺžime každú stranu trojuholníka *ABC* na dvojnásobok (pozri obr.), dostaneme trojuholník *KLM*. Stanovte obsah trojuholníka *KLM*, ak obsah trojuholníka *ABC* je 1.
   a) 4 b) 5 c) 6 d) 7



Správne riešenia sa môžete dozvedieť aj na webstránke www.era.topindex.sk

Bez hlbšieho vnútorného záujmu a výrazne kladného vôľového postoja, osobitých myšlienkových foriem a špecifických postupov usudzovania i argumentácie, abstraktnej predstavivosti a systematickej pojmovej výstavby nemožno trvalo uspieť ani v budovaní elementárnych základov matematickej zručnosti prostredníctvom školskej matematiky. Neformálne matematické porozumenie je vždy prejavom vytrvalej myšlienkovej dôslednosti i ochoty prekonávať prekážky vo vnímaní a odhaľovaní súvislostí. Ak majú byť matematické vedomosti užitočnou súčasťou ľudskej kultúry, tak majú zvýrazniť a rozvíjať samostatné a kritické myslenie, tvorivosť vo využívaní abstraktných prístupov pri rôznej reprezentácii a odhaľovanie rôznorodých hierarchizovaných štruktúr pojmov a súvislostí medzi nimi. Už aj školská matematika dáva dostatok príležitostí uplatňovať tvorivý proces myslenia a rozumového uvažovania, ktoré môže byť neskôr používané aj v iných predmetoch a pri iných činnostiach.

Literatúra

[1] CIRJAK, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh*. Prešov: Essox, 2000.

[2] GREGOROVÁ, G.: *Zbierka riešených úloh z planimetrie*. Bratislava: Práca, 2000.

[3] HEJNÝ, M. – KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.

[4] JEDINÁK, D.: *Dokážeme, že sa nedá*. ROZHLEDY M–F, roč. 82 (2007), č.1, s. 54–56.

[5] JEDINÁK, D.: *Odvaha i rozvaha pre dokazovanie v školskej matematike.*
M–F–I, roč. 15 (2005/2006) č. 4, s. 203–212.

[6] JEDINÁK, D.: *Percentá sú zradné čísla pomerné.* ROZHLEDY M–F, roč. 82 (2007), č.2, s. 51–53.

[7] JEDINÁK, D.: *Vhodná predstava – cesta k úspechu (aj pri štúdiu matematiky).*
M–F–I, roč. 14 (2004/2005) č. 5, s. 263–268.

[8] JEDINÁK, D.: *Úlohy školskej matematiky, ktorých riešenie mám rád.*
UČITEL MATEMATIKY, roč.14 (2005), č. 1, s. 51–58.

[9] KOPKA, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad L.: UJEP, 1999.

[10] KUŘINA, F. – PŮLPÁN, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Praha: Academia, 2006.

[11] MIHALÍKOVÁ, B. a kol.: *Úlohy MO základnej školy*. Bratislava: IUVENTA, 2003.